

5.7

線分

座標空間において，点 A と B とを結ぶ線分 AB とは，ベクトル $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP}$ とが逆の向きである点 P の全体

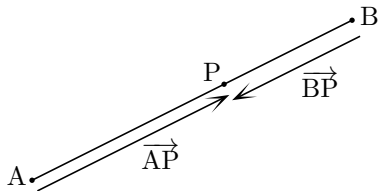
$$\{ P \mid P \text{ は座標空間の点で } \overrightarrow{AP} \text{ と } \overrightarrow{BP} \text{ とが逆の向き} \}$$

である．座標空間の点 A と B と P について，

点 P が線分 AB に属す

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \text{ と } \overrightarrow{BP} \text{ とが逆の向きである}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BP} \neq \mathbf{0} \text{ ならば } 0 \text{ 以下のある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{BP} .$$



[定理] 座標空間の点 A と B について, $A \neq B$ のとき, 線分 AB は直線 AB に含まれる.

[証明] 座標空間の点 A と B と P について, P が線分 AB に属すとする.
ベクトル $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP}$ とが逆の向きなので, $\overrightarrow{AP} \parallel \overrightarrow{BP}$, よって $\overrightarrow{PA} \parallel \overrightarrow{PB}$.
定理 5.1.5 より点 A と B と P が属す直線がある. 故に点 P は直線 AB に属す.

証明終了

[定理 5.7] 座標空間の点 A の位置ベクトルを a とおき, 点 B の位置ベクトルを b とおき, 点 P の位置ベクトルを p とおく. 点 P が線分 AB に属することは次のことと同値である: ある実数 t をとると, $p = ta + (1-t)b$ かつ $0 \leq t \leq 1$.

証明 $A \neq B$ のときを考える.

$$\overrightarrow{AP} = p - a, \quad \overrightarrow{BP} = p - b.$$

点 P が線分 AB に属するとする. ベクトル $\overrightarrow{BP}$ と $\overrightarrow{AP}$ とが逆の向きである. $\overrightarrow{BP} = \mathbf{0}$ のとき, $P = B$ なので $p = 0a + 1b$. $\overrightarrow{BP} \neq \mathbf{0}$ とする. 0 以下のある実数 s をとると $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{BP}$. $s \leq 0$ なので $1 - s \geq 1$.

$$p - a = s(p - b),$$

$$(1 - s)p = a - sb,$$

$$p = \frac{1}{1 - s}a - \frac{s}{1 - s}b,$$

$$t = \frac{1}{1 - s} \text{ とおく. } -\frac{s}{1 - s} = 1 - \frac{1}{1 - s} = 1 - t \text{ なので}$$

$$p = ta + (1 - t)b.$$

$$1 - s \geq 1 \text{ なので } 0 < \frac{1}{1 - s} \leq 1 \text{ よって } 0 < t \leq 1.$$

実数 t について $0 \leq t \leq 1$ で $\boldsymbol{p} = t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b}$ とする.

$$\overrightarrow{\text{AP}} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{a} = t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = (t-1)\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b} = (t-1)(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) ,$$

$$\overrightarrow{\text{BP}} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{b} = t\boldsymbol{a} + (1-t)\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = t\boldsymbol{a} - t\boldsymbol{b} = t(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) .$$

$\overrightarrow{\text{BP}} \neq \boldsymbol{0}$ ならば, $t \neq 0$ なので, $\overrightarrow{\text{AP}} = \frac{t-1}{t}\overrightarrow{\text{BP}}$, $0 < t \leq 1$ なので $\frac{t-1}{t} \leq 0$. $\overrightarrow{\text{AP}}$ と $\overrightarrow{\text{BP}}$ とが逆の向きである. 故に点 P は線分 AB に属す.

証明終了

例 座標空間の点 A と B について $A \neq B$ とする. 点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とおき, 点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とおく. 次のような実数 x を求める: ベクトル $2x\boldsymbol{a} + x^2\boldsymbol{b}$ を位置ベクトルとする点が線分 AB に属す. $2x\boldsymbol{a} + x^2\boldsymbol{b}$ を位置ベクトルとする点が直線 AB に属す条件は, $2x + x^2 = 1$ かつ $0 \leq 2x \leq 1$. 方程式 $2x + x^2 = 1$ を解くと $x = -1 \pm \sqrt{2}$. 不等式 $0 \leq 2x \leq 1$ を解くと $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. この 2 条件より $x = \sqrt{2} - 1$. **終**

問5.7 座標空間の点 A と B について $A \neq B$ とする. 点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とおき, 点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とおく. 次のような実数 x を求めよ: ベクトル $x^2\boldsymbol{a} + 4x\boldsymbol{b}$ を位置ベクトルとする点が線分 AB に属す.

$x^2\boldsymbol{a} + 4x\boldsymbol{b}$ を位置ベクトルとする点が直線 AB に属す条件は, $x^2 + 4x = 1$ かつ $0 \leq 4x \leq 1$. 方程式 $x^2 + 4x = 1$ を解くと $x = -2 \pm \sqrt{5}$. 不等式 $0 \leq 4x \leq 1$ を解くと $0 \leq x \leq \frac{1}{4}$. この2条件より $x = \sqrt{5} - 1$. **終**