

5.5

3次元座標空間における直線

この節では 3 次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ における直線について考える.

3次元座標空間における直線は連立方程式で表すことができる.

[定理 5.5.1] 定数 a, b, c について $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ とする. 定数 x_0, y_0, z_0 に対して, xyz 座標空間においてベクトル (a, b, c) を方向ベクトルとして点 (x_0, y_0, z_0) が属す直線は連立方程式 $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$ で表される.

証明 ベクトル (a, b, c) が直線 L の方向ベクトルであり, $(x_0, y_0, z_0) \in L$ とする. 原点を O とおく. 定理 5.1.6 により, xyz 座標空間の各点 P について,

$$P \in L \Leftrightarrow \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{OP} = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) .$$

$P = (x, y, z)$ とおく.

$$(x, y, z) \in L \Leftrightarrow \text{ある実数 } t \text{ をとると } (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) .$$

ここで

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) \Leftrightarrow x = x_0 + at \text{ かつ } y = y_0 + bt \text{ かつ } z = z_0 + ct$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{x - x_0}{a} \text{ かつ } t = \frac{y - y_0}{b} \text{ かつ } t = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t .$$

よって

$$(x, y, z) \in L \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} .$$

故に直線 L は連立方程式 $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ で表される.

証明終了

[定理 5.5.2] 定数 a, b, c について $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ とする．定数 x_0, y_0, z_0 に対して， xyz 座標空間において連立方程式 $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ が表す図形はベクトル (a, b, c) を方向ベクトルとして点 (x_0, y_0, z_0) が属す直線である．

[証明] 定数 a, b, c について $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ かつ $c \neq 0$ とする．定数 x_0, y_0, z_0 に対して， xyz 座標空間において連立方程式 $\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$ が表す図形を F とおく．各実数 x, y, z について，

$$(x, y, z) \in F \iff \frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c} .$$

原点 $O = (0, 0, 0)$ 及び点 $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ 及び点 $P = (x, y, z)$ について,

$$P \in F \Leftrightarrow (x, y, z) \in F \Leftrightarrow \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$\Leftrightarrow \text{ある実数 } t \text{ をとると } \frac{x - x_0}{a} = t \text{ かつ } \frac{y - y_0}{b} = t \text{ かつ } \frac{z - z_0}{c} = t$$

$$\Leftrightarrow \text{ある実数 } t \text{ をとると } x = at + x_0 \text{ かつ } y = bt + y_0 \text{ かつ } z = ct + z_0$$

$$\Leftrightarrow \text{ある実数 } t \text{ をとると } (x, y, z) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$$

$$\Leftrightarrow \text{ある実数 } t \text{ をとると } (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) = t(a, b, c)$$

$$\Leftrightarrow \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = t(a, b, c)$$

$$\Leftrightarrow \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{P_0P} = t(a, b, c)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} // (a, b, c) .$$

つまり,

$$\text{各点 } P \text{ について } P \in F \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} // (a, b, c) .$$

定理 5.1.1 により F はベクトル (a, b, c) を方向ベクトルとする直線である.

証明終了

例 xyz 座標空間において 2 点 $(4, 2, 5)$ と $(7, 8, -4)$ とが属す直線 L を表す x, y, z に関する連立方程式を求める. 2 点 $(4, 2, 5)$ と $(7, 8, -4)$ とが属す直線 L の方向ベクトルの一つは

$$(4, 2, 5) - (7, 8, -4) = (-3, -6, 9) .$$

このベクトルと平行なベクトル $(1, 2, -3)$ は L の方向ベクトルである. 直線 L は x, y, z に関する連立方程式 $\frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-5}{-3}$ つまり

$$x-4 = \frac{y-2}{2} = -\frac{z-5}{3} \quad \text{で表される.}$$

終

問5.5.1 xyz 座標空間において 2 点 $(-2, 7, 1)$ と $(-8, 5, 9)$ とが属す直線 L を表す x, y, z に関する連立方程式を求める. 2 点 $(-2, 7, 1)$ と $(-8, 5, 9)$ とが属す直線 L の方向ベクトルの一つは

$$(-2, 7, 1) - (-8, 5, 9) = (6, 2, -8) .$$

このベクトルと平行なベクトル $(3, 1, -4)$ は L の方向ベクトルである. 直線 L は x, y, z に関する連立方程式 $\frac{x+2}{3} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-1}{-4}$ つまり $\frac{x+2}{3} = y-7 = -\frac{z-1}{4}$ で表される.

[定理 5.5.3] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ において，直線 L_1 の任意の方向ベクトル $\mathbf{k}_1$ と直線 L_2 の任意の方向ベクトル $\mathbf{k}_2$ について，

$$L_1 // L_2 \Leftrightarrow \mathbf{k}_1 // \mathbf{k}_2 \quad ,$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \mathbf{k}_1 \perp \mathbf{k}_2 \quad .$$

例 変数 x と y について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める：3次元座標空間の点 $A = (1, 3, 4)$ と $B = (x, 2, 6)$ と $C = (5, y, 8)$ と $D = (6, 7, y)$ とに対して，直線 AB と直線 CD とが平行である．

$$\overrightarrow{AB} = (x, 2, 6) - (1, 3, 4) = (x-1, -1, 2) ,$$

$$\overrightarrow{CD} = (6, 7, y) - (5, y, 8) = (1, 7-y, y-8) .$$

$\overrightarrow{AB} \neq \mathbf{0}$ なのでベクトル $\overrightarrow{AB}$ は直線 AB の方向ベクトルである． $\overrightarrow{CD} \neq \mathbf{0}$ なのでベクトル $\overrightarrow{CD}$ は直線 CD の方向ベクトルである．直線 AB と直線 CD とが平行であることと同値な条件は，

$$\overrightarrow{CD} // \overrightarrow{AB} ,$$

$$(1, 7-y, y-8) // (x-1, -1, 2) ,$$

$(x-1, -1, 2) \neq \mathbf{0}$ なので，

$$\text{ある実数 } k \text{ をとると } (1, 7-y, y-8) = k(x-1, -1, 2) ,$$

$$\text{ある実数 } k \text{ をとると } 1 = k(x-1) \text{ かつ } 7-y = -k \text{ かつ } y-8 = 2k .$$

直線 AB と直線 CD とが平行であることと同値な条件は、ある実数 k をとると $2 = k(x - 1)$ かつ $8 - y = -k$ かつ $y - 9 = 2k$. $-k = 8 - y$ かつ $2k = y - 9$ なので、 $k = -1$ かつ $y = 7$. $2 = k(x - 1)$ なので $x = -1$. 故に、直線 AB と直線 CD とが平行であることと同値な条件は、 $x = -1$ かつ $y = 7$.

終

問5.5.2 変数 x と y について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求めよ：3次元座標空間の点 $A = (1, 2, 5)$ と $B = (3, y, 9)$ と $C = (x, 6, 7)$ と $D = (4, 8, x)$ とに対して、直線 AB と直線 CD とが平行である。

$$\overrightarrow{AB} = (3, y, 9) - (1, 2, 5) = (2, y - 2, 4) ,$$

$$\overrightarrow{CD} = (4, 8, x) - (x, 6, 7) = (4 - x, 2, x - 7) .$$

$\overrightarrow{AB} \neq \mathbf{0}$ なのでベクトル $\overrightarrow{AB}$ は直線 AB の方向ベクトルである． $\overrightarrow{CD} \neq \mathbf{0}$ なのでベクトル $\overrightarrow{CD}$ は直線 CD の方向ベクトルである．直線 AB と直線 CD とが平行であることと同値な条件は、

$$\overrightarrow{CD} // \overrightarrow{AB} ,$$

$$(4 - x, 2, x - 7) // (2, y - 2, 4) ,$$

$(2, y - 2, 4) \neq \mathbf{0}$ なので、

ある実数 k をとると $(4 - x, 2, x - 7) = k(2, y - 2, 4) .$

$2k = 4 - x$ かつ $4k = x - 7$ なので, $k = -\frac{1}{2}$ かつ $x = 5$. $k(y - 2) = 2$ なので $y = -2$. 故に, 直線 AB と直線 CD とが平行であることと同値な条件は, $x = 5$ かつ $y = -2$. 終

例 変数 x について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める：3次元座標空間の点 $A = (1, 3, 2)$ と $B = (x, 4, 5)$ と $C = (7, x, 6)$ と $D = (9, 8, x)$ とに対して、直線 AB と直線 CD とが垂直である。

$$\overrightarrow{AB} = (x, 4, 5) - (1, 3, 2) = (x - 1, 1, 3) ,$$

$$\overrightarrow{CD} = (9, 8, x) - (7, x, 6) = (2, 8 - x, x - 6) .$$

$\overrightarrow{AB} \neq \mathbf{0}$ なのでベクトル $\overrightarrow{AB}$ は直線 AB の方向ベクトルである． $\overrightarrow{CD} \neq \mathbf{0}$ なのでベクトル $\overrightarrow{CD}$ は直線 CD の方向ベクトルである．直線 AB と直線 CD とが垂直であることと同値な条件は、

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} ,$$

$$(x - 1, 1, 3) \perp (2, 8 - x, x - 6) ,$$

$$(x - 1, 1, 3) \cdot (2, 8 - x, x - 6) = 0 .$$

$$2(x - 1) + (8 - x) + 3(x - 6) = 0 ,$$

$$4x - 12 = 0 ,$$

よって $x = 3$. 故に, 直線 AB と直線 CD とが垂直であることと同値な条件は $x = 3$.

終

問5.5.3 変数 x について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求め

よ：3次元座標空間の点 $A = (3, 2, 1)$ と $B = (x, 4, 5)$ と $C = (6, x, 7)$ と $D = (8, 9, x)$ とに対して，直線 AB と直線 CD とが垂直である．

$$\overrightarrow{AB} = (x, 4, 5) - (3, 2, 1) = (x - 3, 2, 4) ,$$

$$\overrightarrow{CD} = (8, 9, x) - (6, x, 7) = (2, 9 - x, x - 7) .$$

$\overrightarrow{AB} \neq \mathbf{0}$ なのでベクトル $\overrightarrow{AB}$ は直線 AB の方向ベクトルである． $\overrightarrow{CD} \neq \mathbf{0}$ なのでベクトル $\overrightarrow{CD}$ は直線 CD の方向ベクトルである．直線 AB と直線 CD とが垂直であることと同値な条件は，

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} ,$$

$$(x - 3, 2, 4) \perp (2, 9 - x, x - 7) ,$$

$$(x - 3, 2, 4) \cdot (2, 9 - x, x - 7) = 0 .$$

$$2(x - 3) + 2(9 - x) + 4(x - 7) = 0 ,$$

$$4x - 16 = 0 ,$$

よって $x = 4$. 故に, 直線 AB と直線 CD とが垂直であることと同値な条件は $x = 4$.

終

例 3次元座標空間において、ベクトル $(1,2,3)$ を方向ベクトルとする直線 L に点 $A = (5,4,7)$ が属すとする．点 $B = (2,3,4)$ から直線 L に下した垂線の足 H を求める． $(1,2,3)$ が方向ベクトルであり点 A が属す直線 L に点 H は属するので、定理 5.1.6 より、ある実数 t をとると

$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + t(1,2,3) = (5,4,7) - (2,3,4) + (t,2t,3t) = (t+3,2t+1,3t+3)$.
 $\overrightarrow{BH} = (t+3,2t+1,3t+3) \neq \mathbf{0}$ なので、 $\overrightarrow{BH}$ は直線 BH の方向ベクトルである．直線 BH と直線 L とが垂直なので、

$$(1,2,3) \perp \overrightarrow{BH} ,$$

$$(1,2,3) \perp (t+3,2t+1,3t+3) ,$$

$$(1,2,3) \cdot (t+3,2t+1,3t+3) = 0 ,$$

$$t+3+4t+2+9t+9=0 ,$$

$$14t+14=0 ,$$

よって $t = -1$. $\overrightarrow{\text{BH}} = (t+3, 2t+1, 3t+3) = (2, -1, 0)$ なので, 原点 O に対して,

$$\overrightarrow{\text{OH}} = \overrightarrow{\text{OB}} + \overrightarrow{\text{BH}} = (2, 3, 4) + (2, -1, 0) = (4, 2, 4) .$$

故に $\text{H} = (4, 2, 4)$.

別解 点 B から直線 L に下した垂線の足 H は、 L に属す各点 P のうち点 B との距離 $\overline{BP}$ が最小になる点である． $(1,2,3)$ が方向ベクトルであり点 A が属す直線 L に属す各点 P について，定理 5.1.6 より，ある実数 t をとると

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + t(1,2,3) = (5,4,7) - (2,3,4) + (t,2t,3t) = (t+3, 2t+1, 3t+3) ,$$

$$\overline{BP}^2 = |\overrightarrow{BP}|^2 = (t+3)^2 + (2t+1)^2 + (3t+3)^2$$

$$= t^2 + 6t + 9 + 4t^2 + 4t + 1 + 9t^2 + 18t + 9 = 14t^2 + 28t + 19$$

$$= 14(t^2 + 2t) + 19 = 14(t^2 + 2t + 1) - 14 + 19$$

$$= 14(t+1)^2 + 5 .$$

$\overline{BP}^2$ の値が最小になるのは $t = -1$ のときである．このとき， $P = H$ なので，

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BP} = (t+3, 2t+1, 3t+3) = (2, -1, 0) ;$$

原点 O に対して，

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BH} = (2, 3, 4) + (2, -1, 0) = (4, 2, 4) .$$

故に $H = (4, 2, 4)$.

終

問5.5.4 3次元座標空間において、直線 L の方向ベクトルの一つが $(3,2,1)$ であり点 $A = (9,8,8)$ が L に属すとする．点 $B = (5,3,2)$ から直線 L に下した垂線の足 H を求めよ．

$(3,2,1)$ が方向ベクトルであり点 A が属す直線 L に点 H は属するので、定理 5.1.6 より、ある実数 t をとると

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BA} + t(3,2,1) = (9,8,8) - (5,3,2) + (3t,2t,t) = (3t+4,2t+5,t+6) .$$

$\overrightarrow{BH} = (3t+4,2t+5,t+6) \neq \mathbf{0}$ なので、 $\overrightarrow{BH}$ は直線 BH の方向ベクトルである．直線 BH と直線 L とが垂直なので、

$$(3,2,1) \perp \overrightarrow{BH} ,$$

$$(3,2,1) \perp (3t+4,2t+5,t+6) ,$$

$$(3,2,1) \cdot (3t+4,2t+5,t+6) = 0 ,$$

$$9t + 12 + 4t + 10 + t + 6 = 0 ,$$

$$14t + 28 = 0 \ ,$$

よって $t = -2$. $\overrightarrow{\text{BH}} = (3t + 4, 2t + 5, t + 6) = (-2, 1, 4)$ なので, 原点 O に対して,

$$\overrightarrow{\text{OH}} = \overrightarrow{\text{OB}} + \overrightarrow{\text{BH}} = (5, 3, 2) + (-2, 1, 4) = (3, 4, 6) \ .$$

故に $\text{H} = (3, 4, 6)$.

終

例 3次元座標空間の点 $A = (3, 6, 7)$ と $B = (5, 8, 9)$ と $C = (1, 2, 4)$ について、点 C から直線 AB に下した垂線の足 H を求める.

$$\overrightarrow{CA} = (3, 6, 7) - (1, 2, 4) = (2, 4, 3), \quad \overrightarrow{CB} = (5, 8, 9) - (1, 2, 4) = (4, 6, 5).$$

点 H は直線 AB に属するので、定理 5.1.7 より、ある実数 t をとると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CH} &= t\overrightarrow{CA} + (1-t)\overrightarrow{CB} = t(2, 4, 3) + (1-t)(4, 6, 5) \\ &= (2t + 4(1-t), 4t + 6(1-t), 3t + 5(1-t)) \\ &= (-2t + 4, -2t + 6, -t + 5).\end{aligned}$$

$\overrightarrow{CH} = (-2t + 4, -2t + 6, -t + 5) \neq \mathbf{0}$ なので、 $\overrightarrow{CH}$ は直線 CH の方向ベクトルである. また、 $\overrightarrow{AB} = (5, 8, 9) - (3, 6, 7) = (2, 2, 2)$ は直線 AB の方向ベクトルである. 直線 AB と直線 CH とが垂直なので、定理 5.4 より $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CH}$, よって、

$$(2, 2, 2) \cdot (-2t + 4, -2t + 6, -t + 5) = 0,$$

$$-4t + 8 - t + 5 - t + 5 = 0 ,$$

$$-6t + 18 = 0 ,$$

よって $t = 3$ なので, $\overrightarrow{\text{CH}} = (-2t + 4, -t + 5, -t + 5) = (-2, 2, 2)$. 原点 O に対して,

$$\overrightarrow{\text{OH}} = \overrightarrow{\text{OC}} + \overrightarrow{\text{CH}} = (1, 2, 4) + (-2, 2, 2) = (-1, 4, 6) .$$

故に $\text{H} = (-1, 4, 6)$.

終

問5.5.5 3次元座標空間の点 $A = (1, 2, 3)$ と $B = (4, 7, 8)$ と $C = (5, 6, 9)$ について, 点 A から直線 BC に下した垂線の足 H を求めよ.

$$\overrightarrow{AB} = (4, 7, 8) - (1, 2, 3) = (3, 5, 5), \quad \overrightarrow{AC} = (5, 6, 9) - (1, 2, 3) = (4, 4, 6).$$

点 H は直線 BC に属するので, 定理 5.1.7 より, ある実数 t をとると,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC} = t(3, 5, 5) + (1-t)(4, 4, 6) \\ &= (3t + 4(1-t), 5t + 4(1-t), 5t + 6(1-t)) \\ &= (-t + 4, t + 4, -t + 6).\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AH} = (-t + 4, t + 4, -t + 6) \neq \mathbf{0}$ なので, $\overrightarrow{AH}$ は直線 AH の方向ベクトルである. また, $\overrightarrow{BC} = (5, 6, 9) - (4, 7, 8) = (1, -1, 1)$ は直線 BC の方向ベクトルである. 直線 BC と直線 AH とが垂直なので, 定理 5.4 より $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH}$, よって,

$$(1, -1, 1) \cdot (-t + 4, t + 4, -t + 6) = 0,$$

$$-t+4-t-4-t+6=0 \ ,$$

$$-3t+6=0 \ ,$$

よって $t=2$ なので, $\overrightarrow{AH} = (-t+4, t+4, -t+6) = (2, 6, 4)$. 原点 O に対して,

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = (1, 2, 3) + (2, 6, 4) = (3, 8, 7) \ .$$

故に $H = (3, 8, 7)$.

終

例 xyz 座標空間において連立方程式 $x-4 = \frac{y-7}{2} = -\frac{z+6}{5}$ が表す直線 L_1 と連立方程式 $\frac{x+1}{3} = \frac{y+9}{4} = -\frac{z-5}{8}$ が表す直線 L_2 との両方に垂直であり点 $(-2, -3, 8)$ が属す直線 L_3 を表す方程式を求める．定数 a, b, c について，ベクトル (a, b, c) が直線 L_3 の方向ベクトルであるとする．定理 5.5.3 より，連立方程式 $x-4 = \frac{y-7}{2} = -\frac{z+6}{5}$ が表す直線 L_1 の方向ベクトルの一つは $(1, 2, -5)$ である．定理 5.5.3 より，連立方程式 $\frac{x+1}{3} = \frac{y+9}{4} = -\frac{z-5}{8}$ が表す直線 L_2 の方向ベクトルの一つは $(3, 4, -8)$ である．直線 L_1 と直線 L_3 とが垂直なので，定理 5.5.1 より，直線 L_1 の方向ベクトル $(1, 2, -5)$ と直線 L_3 の方向ベクトル (a, b, c) とが垂直である．よって， $(1, 2, -5) \cdot (a, b, c) = 0$ ， $a + 2b - 5c = 0$ ．直線 L_2 と直線 L_3 とが垂直なので，定理 5.5.1 より，直線 L_2 の方向ベクトル $(3, 4, -8)$ と直線 L_3 の方向ベクトル (a, b, c) とが垂直である．よって， $(3, 4, -8) \cdot (a, b, c) = 0$ ， $3a + 4b - 8c = 0$ ．

$a + 2b - 5c = 0$ より $2a + 4b - 10c = 0$, これと $3a + 4b - 8c = 0$ より,
 $a + 2c = 0$, $a = -2c$. $a + 2b - 5c = 0$ より $2b = 5c - a = 5c + 2c = 7c$,
 $b = \frac{7}{2}c$. $c = 2$ とすると, $a = -4$ かつ $b = 7$. L_3 の方向ベクトルの一つ
は $(-4, 7, 2)$ である. 点 $(-2, -3, 8)$ が直線 L_3 に属するので, 直線 L_3 は方程
式 $-\frac{x+2}{4} = \frac{y+3}{7} = \frac{z-8}{2}$ で表される.

終

問5.5.6 xyz 座標空間において連立方程式 $x+5 = \frac{y-5}{2} = -\frac{z-3}{4}$ が表す直線 L_1 と連立方程式 $\frac{x+4}{3} = y-2 = -\frac{z-6}{5}$ が表す直線 L_2 との両方に垂直であり点 $(7, -8, 9)$ が属す直線 L_3 を表す直線を求めよ.

定数 a, b, c について, ベクトル (a, b, c) が直線 L_3 の方向ベクトルであるとする. 連立方程式 $x+5 = \frac{y-5}{2} = -\frac{z-3}{4}$ が表す直線 L_1 の方向ベクトルの一つは $(1, 2, -4)$ である. 連立方程式 $\frac{x+4}{3} = y-2 = -\frac{z-6}{5}$ が表す直線 L_2 の方向ベクトルの一つは $(3, 1, -5)$ である. 直線 L_1 と直線 L_3 とが垂直なので, 直線 L_1 の方向ベクトル $(1, 2, -4)$ と直線 L_3 の方向ベクトル (a, b, c) とが垂直である. よって, $(1, 2, -4) \cdot (a, b, c) = 0$, $a + 2b - 4c = 0$. 直線 L_2 と直線 L_3 とが垂直なので, 直線 L_2 の方向ベクトル $(3, 1, -5)$ と直線 L_3 の方向ベクトル (a, b, c) とが垂直である. よって,

$(3, 1, -5) \cdot (a, b, c) = 0$, $3a + b - 5c = 0$. この等式より $6a + 2b - 10c = 0$,
これと $a + 2b - 4c = 0$ より, $5a - 6c = 0$, $c = \frac{5}{6}a$. $a + 2b - 4c = 0$ よ
り $2b = 4c - a = 4 \cdot \frac{5}{6}a - a = \frac{7}{3}a$, $b = \frac{7}{6}a$. $a = 6$ とすると, $b = 7$ かつ
 $c = 5$. L_3 の方向ベクトルの一つは $(6, 7, 5)$ である. 点 $(7, -8, 9)$ が直線 L_3
に属するので, 直線 L_3 は方程式 $\frac{x-7}{6} = \frac{y+8}{7} = \frac{z-9}{5}$ で表される.