

5.4

座標平面における2直線の平行と垂直

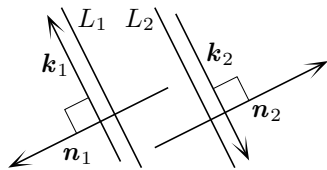
この節では座標平面 $\mathbf{R}^2$ における直線について考える.

座標平面 $\mathbf{R}^2$ における直線 L_1 と L_2 とが平行であるとは, L_1 のある方向ベクトルと L_2 のある方向ベクトルとが平行であることである; このことを $L_1 \parallel L_2$ と表記する. 座標平面における直線 L_1 と L_2 とが垂直であるとは, L_1 のある方向ベクトルと L_2 のある方向ベクトルとが垂直であることである; このことを $L_1 \perp L_2$ と表記する.

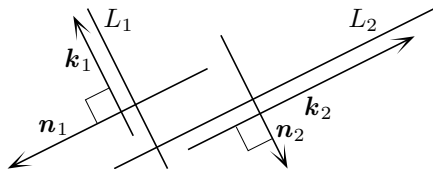
次の定理は証明を省く.

[定理 5.4.1] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において, 直線 L_1 の任意の方向ベクトル k_1 及び L_1 の任意の法線ベクトル n_1 , 直線 L_2 の任意の方向ベクトル k_2 及び L_2 の任意の法線ベクトル n_2 について,

$$\begin{aligned} L_1 // L_2 &\Leftrightarrow k_1 // k_2 \\ &\Leftrightarrow n_1 // n_2 \\ &\Leftrightarrow k_1 \perp n_2 \\ &\Leftrightarrow n_1 \perp k_2, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} L_1 \perp L_2 &\Leftrightarrow k_1 \perp k_2 \\ &\Leftrightarrow n_1 \perp n_2 \\ &\Leftrightarrow k_1 // n_2 \\ &\Leftrightarrow n_1 // k_2. \end{aligned}$$



xy 座標平面において x に垂直でない直線 L_1 と L_2 について, L_1 の傾きを a_1 とおき, L_2 の傾きを a_2 とおく. ベクトル $(1, a_1)$ は L_1 の方向ベクトルであり, ベクトル $(1, a_2)$ は L_2 の方向ベクトルである. 定理 5.4.1 により,

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow (1, a_1) \parallel (1, a_2) \Leftrightarrow 1 \cdot a_2 = 1 \cdot a_1 \Leftrightarrow a_1 = a_2 .$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow (1, a_1) \perp (1, a_2) \Leftrightarrow 1 + a_1 a_2 = 0 \Leftrightarrow a_1 a_2 = -1 .$$

[定理 5.4.2] xy 座標平面において x 軸に垂直でない直線 L_1 と L_2 について, L_1 の傾きを a_1 とおき L_2 の傾きを a_2 とおくと,

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 ,$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow a_1 a_2 = -1 .$$

座標平面 $\mathbf{R}^2$ の相異なる点 A と B に対して、ベクトル $\overrightarrow{AB}$ は零ベクトルではないので、点 A が属し $\overrightarrow{AB}$ を方向ベクトルとする直線が唯一つ定まる：この直線が直線 AB である．

例 変数 x について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める：座標平面の点 $A = (5, 2)$ と $B = (x, 8)$ と $C = (3, x)$ と $D = (x, 4)$ とに対して、直線 AB と直線 CD とが平行である．直線 AB と直線 CD とが平行であることと同値な条件は、 $x \neq 5$ かつ $x \neq 3$ のとき、直線 AB の傾き $\frac{8-2}{x-5}$ と直線 CD の傾き $\frac{4-x}{x-3}$ について $\frac{8-2}{x-5} = \frac{4-x}{x-3}$ となることである；しかし、このように考えると、 $x = 5$ のとき及び $x = 3$ のときはどうなるか別途考えなければならない．できればこのように場合分けをせずに済ませたい．

例 変数 x について次の条件と同値なるべく簡単な条件を求める：座標平面の点 $A = (5, 2)$ と $B = (x, 8)$ と $C = (3, x)$ と $D = (x, 4)$ とに対して、直線 AB と直線 CD とが平行である． $A \neq B$ ． $C = D$ とすると、 $(3, x) = (x, 4)$ なので、 $x = 3$ かつ $x = 4$ ；これは矛盾なので $C \neq D$ ．定理 5.1.4 より、ベクトル

$$\overrightarrow{AB} = (x, 8) - (5, 2) = (x - 5, 6) \neq \mathbf{0}$$

は直線 AB の方向ベクトルであり、ベクトル

$$\overrightarrow{CD} = (x, 4) - (3, x) = (x - 3, 4 - x) \neq \mathbf{0}$$

は直線 CD の方向ベクトルである．定理 5.4 より、

$$AB \parallel CD \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (x - 5, 6) \parallel (x - 3, 4 - x) \quad ,$$

定理 3.5.5 より

$$\begin{aligned} (x - 5, 6) \parallel (x - 3, 4 - x) &\Leftrightarrow (x - 5)(4 - x) = 6(x - 3) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ または } x = 2 . \end{aligned}$$

直線 AB と直線 CD とが平行であることと同値な条件は、 $x = 1$ または
 $x = 2$.

終

問5.4.1 変数 x について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求めよ：座標平面の点 $A = (3, 4)$ と $B = (x, 9)$ と $C = (6, x)$ と $D = (2x, 8)$ について、直線 AB と直線 CD とが平行である。

$A \neq B$. $C = D$ とすると、 $(6, x) = (2x, 8)$ なので $x = 3$ かつ $x = 8$; これは矛盾なので $C \neq D$. 直線 AB と直線 CD とが平行であることと同値な条件は $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (x, 9) - (3, 4) = (x - 3, 5) , \\ \overrightarrow{CD} &= (2x, 8) - (6, x) = (2x - 6, 8 - x) ,\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD} &\Leftrightarrow (x - 3, 5) \parallel (2x - 6, 8 - x) \\ &\Leftrightarrow (x - 3)(8 - x) = 5(2x - 6) \Leftrightarrow (x - 3)(x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \text{ または } x = -2 .\end{aligned}$$

直線 AB と直線 CD とが平行であることと同値な条件は、 $x = 3$ または

$$x = -2 \text{ .}$$

終

例 変数 x について次の条件と同値なるべく簡単な条件を求めよ：座標平面の点 $A = (2, 3)$ と $B = (x, 7)$ と $C = (5, x)$ と $D = (x, 2)$ とに対して、直線 AB と直線 CD とが垂直である． $A \neq B$ ． $C = D$ とすると、 $(5, x) = (x, 2)$ なので、 $x = 5$ かつ $x = 2$ ；これは矛盾なので $C \neq D$ ．定理 5.1.4 より、ベクトル

$$\overrightarrow{AB} = (x, 7) - (2, 3) = (x - 2, 4) \neq \mathbf{0}$$

は直線 AB の方向ベクトルであり、ベクトル

$$\overrightarrow{CD} = (x, 2) - (5, x) = (x - 5, 2 - x) \neq \mathbf{0}$$

は直線 CD の方向ベクトルである．定理 5.4 より、

$$\begin{aligned} AB \perp CD &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (x - 2, 4) \perp (x - 5, 2 - x) \\ &\Leftrightarrow (x - 2)(x - 5) + 4(2 - x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x - 9) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ または } x = 9 . \end{aligned}$$

直線 AB と直線 CD とが垂直であることと同値な条件は、 $x = 2$ または

$$x = 9 \text{ .}$$

終

問5.4.2 変数 x について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求めよ：座標平面の点 $A = (5, 3)$ と $B = (9, x)$ と $C = (2x, 1)$ と $D = (6, x)$ について、直線 AB と直線 CD とが垂直である。

$A \neq B$. $C = D$ とすると、 $(2x, 1) = (6, x)$ なので $x = 3 = 1$; これは矛盾なので $C \neq D$. 直線 AB と直線 CD とが垂直であることと同値な条件は $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (9, x) - (5, 3) = (4, x - 3) , \\ \overrightarrow{CD} &= (6, x) - (2x, 1) = (6 - 2x, x - 1) ,\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} &\Leftrightarrow (4, x - 3) \perp (6 - 2x, x - 1) \\ &\Leftrightarrow 4(6 - 2x) + (x - 3)(x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)(x - 9) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \text{ または } x = 9 \quad .\end{aligned}$$

直線 AB と直線 CD とが垂直であることと同値な条件は、 $x = 3$ または
 $x = 9$. 終

例 変数 k について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める： xy 座標平面において方程式 $3x + ky = 7$ が表す直線 L_1 と方程式 $5x + k^2y = 9$ が表す直線 L_2 とが平行である． $k \neq 0$ のとき， L_1 と L_2 とが平行であることと同値な条件は， L_1 の傾き $-\frac{3}{k}$ と L_2 の傾き $-\frac{5}{k^2}$ とが等しくなればよい；しかし，このように考えると， $k = 0$ のときはどうなるのか別途考えなければならない．できればこのように場合わけをせずに済ませたい．

例 変数 k について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める: xy 座標平面において方程式 $3x + ky = 7$ が表す直線 L_1 と方程式 $5x + k^2y = 9$ が表す直線 L_2 とが平行である. 定理 5.3.4 により, ベクトル $(3, k)$ は L_1 の法線ベクトルであり, ベクトル $(5, k^2)$ は L_2 の法線ベクトルである. 定理 5.4 より,

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow (3, k) \parallel (5, k^2) \quad .$$

定理 3.5.5 より,

$$\begin{aligned}(3, k) \parallel (5, k^2) &\Leftrightarrow 3k^2 = 5k \Leftrightarrow k(3k - 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow k = 0 \text{ または } k = \frac{5}{3} \quad .\end{aligned}$$

直線 L_1 と直線 L_2 とが平行であることと同値な条件は, $k = 0$ または $k = \frac{5}{3}$.

終

問5.4.3 変数 k について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求めよ： xy 座標平面において方程式 $7x - ky = 5$ が表す直線 L_1 と方程式 $3x + k^2y = 9$ が表す直線 L_2 とが平行である。

直線 L_1 と直線 L_2 とが平行であることと同値な条件は， L_1 の法線ベクトル $(7, -k)$ と L_2 の法線ベクトル $(3, k^2)$ とが平行であることである。

$$\begin{aligned}(7, -k) // (3, k^2) &\Leftrightarrow 7k^2 = -3k \Leftrightarrow k(7k + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow k = 0 \text{ または } k = -\frac{3}{7} .\end{aligned}$$

直線 L_1 と直線 L_2 とが平行であることと同値な条件は， $k = 0$ または $k = -\frac{3}{7}$.

終

例 変数 k について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求めよ： xy 座標平面において方程式 $3x + ky = 4$ が表す直線 L_1 と方程式 $k^2x + 5y = 9$ が表す直線 L_2 とが垂直である．定理 5.3.4 より，ベクトル $(3, k)$ は L_1 の法線ベクトルであり，ベクトル $(k^2, 5)$ は L_2 の法線ベクトルである．定理 5.4 より，

$$\begin{aligned} L_1 \perp L_2 &\Leftrightarrow (3, k) \perp (k^2, 5) \Leftrightarrow 3k^2 + 5k = 0 \Leftrightarrow k(3k + 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow k = 0 \text{ または } k = -\frac{5}{3} . \end{aligned}$$

直線 L_1 と直線 L_2 とが垂直であることと同値な条件は， $k = 0$ または $k = -\frac{5}{3}$.

終

問5.4.4 変数 k について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求めよ： xy 座標平面において方程式 $kx - 5y = 3$ が表す直線 L_1 と方程式 $7x + k^2y = 8$ が表す直線 L_2 とが垂直である。

直線 L_1 と直線 L_2 とが垂直であることと同値な条件は， L_1 の法線ベクトル $(k, -5)$ と L_2 の法線ベクトル $(7, k^2)$ とが垂直であることである。

$$\begin{aligned}(k, -5) \perp (7, k^2) &\Leftrightarrow 7k - 5k^2 = 0 \Leftrightarrow k(5k - 7) = 0 \\ &\Leftrightarrow k = 0 \text{ または } k = \frac{7}{5} .\end{aligned}$$

直線 L_1 と直線 L_2 とが垂直であることと同値な条件は， $k = 0$ または $k = \frac{7}{5}$.

終

例 xy 座標平面において方程式 $2x + 3y = 7$ が表す直線と平行で点 $(4, 5)$ が属す直線 L を表す方程式を求める．定理 5.4 より，方程式 $2x + 3y = 7$ が表す直線の法線ベクトル $(2, 3)$ と直線 L の法線ベクトルとが平行である．定理 5.2.4 より，ベクトル $(2, 3)$ は L の法線ベクトルである．定理 5.3.2 より，ある定数 c をとると， L は方程式 $2x + 3y = c$ で表される．この直線に点 $(4, 5)$ が属するので， $2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 = c$ ， $c = 23$ ．故に直線 L は方程式 $2x + 3y = 23$ で表される．

終

問5.4.5 xy 座標平面において方程式 $5x - 4y = 1$ が表す直線と平行で点 $(3, 2)$ が属す直線 L を表す方程式を求めよ.

方程式 $5x - 4y = 1$ が表す直線の法線ベクトル $(5, -4)$ が L の法線ベクトルなので, ある定数 c をとると, L は方程式 $5x - 4y = c$ で表される. この直線に点 $(3, 2)$ が属するので, $c = 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = 7$. 故に直線 L は方程式 $5x - 4y = 7$ で表される.

終

例 xy 座標平面において方程式 $2x + 3y = 5$ が表す直線と垂直で点 $(6, 7)$ が属す直線 L を表す方程式を求める．定理 5.4 より，方程式 $2x + 3y = 5$ が表す直線の法線ベクトル $(2, 3)$ と直線 L の方向ベクトルとが平行である．定理 5.1.2 より，ベクトル $(2, 3)$ は L の方向ベクトルである．定理 5.3.3 より，ある定数 c をとると， L は方程式 $3x - 2y = c$ で表される．この直線に点 $(6, 7)$ が属するので， $3 \cdot 6 - 2 \cdot 7 = c$ ， $c = 4$ ．故に直線 L は方程式 $3x - 2y = 4$ で表される．

終

問5.4.6 xy 座標平面において方程式 $5x - 6y = 3$ が表す直線と垂直で点 $(3, -2)$ が属す直線 L を表す方程式を求めよ.

方程式 $5x - 6y = 3$ が表す直線の方角ベクトル $(6, 5)$ は L の方角ベクトルと垂直なので, ベクトル $(6, 5)$ は L の法線ベクトルである. ある定数 c をとると, L は方程式 $6x + 5y = c$ で表される. この直線に点 $(3, -2)$ が属するので, $c = 6 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) = 8$. 故に直線 L は方程式 $6x + 5y = 8$ で表される**終**

例 xy 座標平面において点 $P = (2, -6)$ から方程式 $3x + 2y = 7$ が表す直線 L に下ろした垂線の足 H を求める．実数 x, y に対して $H = (x, y)$ とおく． $H = (x, y)$ が直線 L に属するので $3x + 2y = 7$ ．方程式 $3x + 2y = 7$ が表す直線 L の一つの方法ベクトルは $(2, -3)$ である．直線 PH と直線 L とが垂直なので，ベクトル $\overrightarrow{PH} = (x, y) - (2, -6) = (x - 2, y + 6)$ とベクトル $(2, -3)$ とが垂直である．よって， $(x - 2, y + 6) \cdot (2, -3) = 0$ ， $2(x - 2) - 3(y + 6) = 0$ ， $2x - 3y = 22$ ． $3x + 2y = 7$ かつ $2x - 3y = 22$ なので， $x = 5$ かつ $y = -4$ ．故に $H = (5, -4)$ ．

終

問5.4.7 xy 座標平面において点 $P = (2, 8)$ から方程式 $4x + 5y = 7$ が表す直線 L に下ろした垂線の足 H を求めよ.

実数 x, y に対して $H = (x, y)$ とおく. $H = (x, y)$ が直線 L に属するので $4x + 5y = 7$. 直線 PH と直線 L とが垂直なので, ベクトル $\overrightarrow{PH} = (x, y) - (2, 8) = (x - 2, y - 8)$ と L の方向ベクトル $(5, -4)$ とが垂直である. よって, $(x - 2, y - 8) \cdot (5, -4) = 0$, $5(x - 2) - 4(y - 8) = 0$, $5x - 4y = -22$. $4x + 5y = 7$ かつ $5x - 4y = -22$ なので, $x = -2$ かつ $y = 3$. 故に $H = (-2, 3)$.

終

点から直線に下した垂線の足は次のような計算でも求めることができる。

例 xy 座標平面において点 $A = (2, 9)$ から方程式 $3x + 5y = 17$ が表す直線 L に下ろした垂線の足 H を求める． A は L に属さないので $H \neq P$ ．直線 L と直線 AH とが垂直なので，定理 5.4 より，直線 L の法線ベクトル $(3, 5)$ と直線 AH の方向ベクトル $\overrightarrow{AH}$ とが平行である．よって定理 5.1.2 よりベクトル $(3, 5)$ は直線 AH の方向ベクトルである．原点を O とおく： $O = (0, 0)$ ．定理 5.1.6 より，ある実数 t をとると

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + t(3, 5) = (2, 9) + (3t, 5t) = (2 + 3t, 9 + 5t),$$

よって $H = (3t + 2, 5t + 9)$ ． H は方程式 $3x + 5y = 17$ が表す直線 L に属するので， $3(3t + 2) + 5(5t + 9) = 17$ ， $34t + 51 = 17$ ， $34t = -34$ ， $t = -1$ ．故に $H = (3t + 2, 5t + 9) = (-1, 4)$ ．

終

問5.4.8 xy 座標平面において点 $P = (1, -2)$ から方程式 $4x - 3y = 15$ が表す直線 L に下ろした垂線の足 H を求めよ.

方程式 $4x - 3y = 15$ が表す直線 L の法線ベクトル $(4, -3)$ と直線 PH の方向ベクトルとが平行なので, ベクトル $(4, -3)$ は直線 PH の方向ベクトルである. 原点を O とおく. ある実数 t をとると, H の位置ベクトルは

$$\overrightarrow{OH} = t(4, -3) + \overrightarrow{OP} = t(4, -3) + (1, -2) = (4t + 1, -3t - 2).$$

H は方程式 $4x - 3y = 15$ が表す直線に属するので, $4(4t + 1) - 3(-3t - 2) = 15$, $25t + 10 = 15$, $t = \frac{1}{5}$, 故に $H = (4t + 1, -3t - 2) = \left(\frac{9}{5}, -\frac{13}{5}\right)$. **終**

例 座標平面の点 $A = (1, 2)$ と $B = (3, 8)$ と $C = (6, 5)$ について, A から直線 BC に下ろした垂線の足 H を求める.

$$\overrightarrow{AB} = (3, 8) - (1, 2) = (2, 6), \quad \overrightarrow{AC} = (6, 5) - (1, 2) = (5, 3).$$

点 H は直線 BC に属するので, 定理 5.1.7 より, ある実数 t をとると,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC} = t(2, 6) + (1-t)(5, 3) = (2t + 5(1-t), 6t + 3(1-t)) \\ &= (-3t + 5, 3t + 3).\end{aligned}$$

$\overrightarrow{AH} = (-3t + 5, 3t + 3) \neq \mathbf{0}$ なので, $\overrightarrow{AH}$ は直線 AH の方向ベクトルである. また, $\overrightarrow{BC} = (6, 5) - (3, 8) = (3, -3)$ は直線 BC の方向ベクトルなので, ベクトル $(1, -1)$ は直線 BC の方向ベクトルである. 直線 BC と直線 AH とが垂直なので, 定理 5.4 より $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AH}$, よって,

$$(1, -1) \cdot (-3t + 5, 3t + 3) = 0,$$

$$-3t + 5 - (3t + 3) = 0,$$

$$-6t + 2 = 0,$$

よって $t = \frac{1}{3}$ なので, $\overrightarrow{CH} = (-3t + 5, 3t + 3) = (4, 4)$. 原点 $O = (0, 0)$ に対して,

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH} = (1, 2) + (4, 4) = (5, 6) .$$

故に $H = (5, 6)$.

終

問5.4.9 座標平面の点 $A = (1, 4)$ と $B = (-1, 6)$ と $C = (-2, 2)$ について、 C から直線 AB に下ろした垂線の足 H を求めよ。

$$\overrightarrow{CA} = (1, 4) - (-2, 2) = (3, 2) \quad \overrightarrow{CB} = (-1, 6) - (-2, 2) = (1, 4) .$$

点 H は直線 AB に属するので、ある実数 t をとると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} &= t\overrightarrow{CA} + (1-t)\overrightarrow{CB} = t(3, 2) + (1-t)(1, 4) = (3t+1-t, 2t+4(1-t)) \\ &= (2t+1, -2t+4) . \end{aligned}$$

$\overrightarrow{CH} \neq \mathbf{0}$ なので、 $\overrightarrow{CH}$ は直線 CH の方向ベクトルである。また、ベクトル $\overrightarrow{AB} = (-1, 6) - (1, 4) = (-2, 2)$ は直線 AB の方向ベクトルなので、ベクトル $(1, -1)$ は直線 AB の方向ベクトルである。直線 AB と CH とが垂直なので、定理 5.4 より、 $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CH} = 0$, よって、

$$(1, -1) \cdot (2t+1, -2t+4) = 0 ,$$

$$2t+1 - (-2t+4) = 0 ,$$

$$4t-3 = 0 ,$$

よって $t = \frac{3}{4}$ なので, $\overrightarrow{CH} = (2t+1, -2t+4) = \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$. 原点 $O = (0, 0)$ に対して,

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CH} = (-2, 2) + \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right) .$$

故に $H = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

終