

5.3

座標平面における直線を表す方程式

この節では座標平面 $\mathbf{R}^2$ における直線について考える.

変数 x と y に関する方程式が成り立つような x の値と y の値との対 (x, y) を xy 座標平面の点と考えて、そのような点の全体をその方程式が表す点集合という。方程式が表す点集合を図形と考えるときは、方程式が表す図形という。

例 変数 x と y に関する方程式 $y = 2x + 1$ が表す図形とは、 xy 座標平面の中で $y = 2x + 1$ となる点 (x, y) の全体

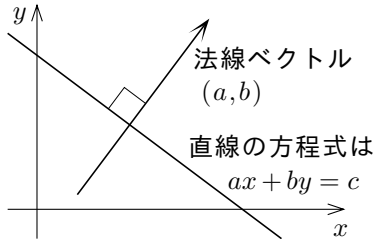
$$\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y = 2x + 1 \}$$

である。つまり、方程式 $y = 2x + 1$ が表す図形は次のような座標平面 $\mathbf{R}^2$ における点集合 F である：

座標平面の各点 (x, y) について $(x, y) \in F \iff y = 2x + 1$.

終

[定理 5.3.1] 定数 a, b について $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする. xy 座標平面において, ベクトル (a, b) が直線 L の法線ベクトルであるならば, ある定数 c をとると, L は方程式 $ax + by = c$ で表される.



証明 ベクトル (a,b) は直線 L の法線ベクトルであるとする. L に属す点 P_0 をとる. 変数 x,y に対する点 $P=(x,y)$ について, 定理 5.2.3 により,

$$(x,y) \in L \Leftrightarrow P \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \perp (a,b) \Leftrightarrow (a,b) \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 .$$

$P_0 = (x_0, y_0)$ (x_0, y_0 は実数) とおく. $\overrightarrow{P_0P} = (x,y) - (x_0, y_0)$ なので,

$$\begin{aligned} (a,b) \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0 &\Leftrightarrow (a,b) \cdot \{(x,y) - (x_0, y_0)\} = 0 \\ &\Leftrightarrow (a,b) \cdot (x,y) - (a,b) \cdot (x_0, y_0) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a,b) \cdot (x,y) = (a,b) \cdot (x_0, y_0) \\ &\Leftrightarrow ax + by = ax_0 + by_0 . \end{aligned}$$

$c = ax_0 + by_0$ とおく.

$$(x,y) \in L \Leftrightarrow ax + by = ax_0 + by_0 \Leftrightarrow ax + by = c .$$

直線 L は方程式 $ax + by = c$ で表される.

証明終了

例 xy 座標平面における直線 L について，点 $(6,5)$ が L に属しベクトル $(-3,2)$ が L の法線ベクトルであるとする． L を表す方程式を求める．ベクトル $(-3,2)$ が直線 L の法線ベクトルなので，定理 5.3.1 より，ある定数 c をとると， L は方程式 $-3x + 2y = c$ で表される．点 $(6,5)$ が L に属するので， $-3 \cdot 6 + 2 \cdot 5 = c$ ， $c = -8$ ．故に直線 L は方程式は $-3x + 2y = -8$ つまり $3x - 2y = 8$ で表される．

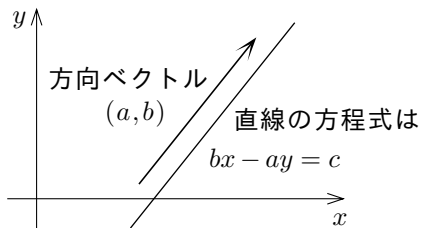
終

問5.3.1 xy 座標平面における直線 L について，点 $(3,2)$ が L に属しベクトル $(-5,4)$ が L の法線ベクトルであるとする． L を表す方程式を求めよ．

ベクトル $(-5,4)$ が直線 L の法線ベクトルなので，ある定数 c をとると， L は方程式 $-5x + 4y = c$ で表される．点 $(3,2)$ が L に属するので， $c = -5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 = -7$ ．直線 L は方程式 $-5x + 4y = -7$ つまり $5x - 4y = 7$ で表される．

終

[定理 5.3.2] 定数 a, b について $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする. xy 座標平面において, ベクトル (a, b) が直線 L の方向ベクトルであるならば, ある定数 c をとると, L は方程式 $bx - ay = c$ で表される.



証明 ベクトル (a,b) は直線 L の方向ベクトルであるとする. L に属す点 P_0 をとる. 各実数 x,y に対して点 $P=(x,y)$ について, 定理 5.1.1 により,

$$(x,y) \in L \Leftrightarrow P \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \parallel (a,b) .$$

$P_0=(x_0,y_0)$ (x_0,y_0 は実数) とおく.

$$\overrightarrow{P_0P} = (x,y) - (x_0,y_0) = (x-x_0, y-y_0) .$$

定理 4.3.5 により,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P} \parallel (a,b) &\Leftrightarrow (x-x_0, y-y_0) \parallel (a,b) \Leftrightarrow b(x-x_0) = a(y-y_0) \\ &\Leftrightarrow bx - ay = bx_0 - ay_0 . \end{aligned}$$

$c = bx_0 - ay_0$ とおく.

$$(x,y) \in L \Leftrightarrow bx - ay = bx_0 - ay_0 \Leftrightarrow bx - ay = c .$$

直線 L は方程式 $bx - ay = c$ で表される.

証明終了

例 xy 座標平面における直線 L について，点 $(4,7)$ が L に属しベクトル $(2,5)$ が L の方向ベクトルであるとする． L を表す方程式を求める．ベクトル $(2,5)$ が直線 L の方向ベクトルなので，定理 5.3.2 より，ある定数 c をとると， L は方程式 $5x - 2y = c$ で表される．点 $(4,7)$ が L に属するので， $5 \cdot 4 - 2 \cdot 7 = c$ ， $c = 6$ ．直線 L は方程式 $5x - 2y = 6$ で表される． **終**

問5.3.2 xy 座標平面における直線 L について、点 $(5,6)$ が L に属しベクトル $(3,4)$ が L の方向ベクトルであるとする． L を表す方程式を求めよ．

ベクトル $(3,4)$ が直線 L の方向ベクトルなので、ある定数 c をとると、 L は方程式 $4x - 3y = c$ で表される．点 $(5,6)$ が L に属するので、 $c = 4 \cdot 5 - 3 \cdot 6 = 2$ ．直線 L は方程式 $4x - 3y = 2$ で表される．

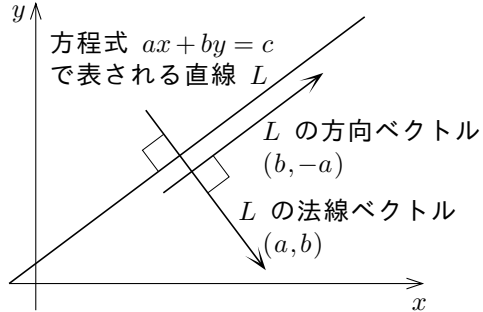
終

例 xy 座標平面において，点 $(5,6)$ と点 $(7,9)$ とが属す直線 L を表す方程式を求める．定理 5.1.4 より，ベクトル $(7,9) - (5,6) = (2,3)$ は直線 L の方向ベクトルである．従って定理 5.3.2 より，ある定数 c をとると， L は方程式 $3x - 2y = c$ で表される．点 $(5,6)$ が直線 L に属するので， $3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 = c$ ， $c = 3$ ．故に直線 L は方程式 $3x - 2y = 3$ で表される． **終**

問5.3.3 xy 座標平面において，点 $(1,5)$ と点 $(4,3)$ とが属す直線 L を表す方程式を求めよ．

ベクトル $(4,3) - (1,5) = (3,-2)$ は直線 L の方向ベクトルなので，ある定数 c をとると， L は方程式 $-2x - 3y = c$ で表される．点 $(1,5)$ が L に属するので， $c = -2 \cdot 1 - 3 \cdot 5 = -17$ ．直線 L は方程式 $-2x - 3y = -17$ つまり $2x + 3y = 17$ で表される．

[定理 5.3.3] a, b, c は定数で
 $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする. xy
 座標平面において, 変数 x, y に
 関する方程式 $ax + by = c$ が表す
 点集合 L は直線であり, ベクトル
 $(b, -a)$ は L の方向ベクトル
 であり, ベクトル (a, b) は L の
 法線ベクトルである.



[証明] $a \neq 0$ または $b \neq 0$ なので, $a^2 + b^2 > 0$. $x_0 = \frac{ac}{a^2 + b^2}$, $y_0 = \frac{bc}{a^2 + b^2}$
 とおく. このとき

$$ax_0 + by_0 = a \frac{ac}{a^2 + b^2} + b \frac{bc}{a^2 + b^2} = \frac{a^2c + b^2c}{a^2 + b^2} = \frac{c(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2} = c.$$

$$ax_0 + by_0 = c .$$

点 $P_0 = (x_0, y_0)$ を考える. 点 $P = (x, y)$ について, $\overrightarrow{P_0P} = (x, y) - (x_0, y_0) = (x - x_0, y - y_0)$ なので, 定理 4.3.5 により,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_0P} // (b, -a) &\Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0) // (b, -a) \\ &\Leftrightarrow -a(x - x_0) = b(y - y_0) \Leftrightarrow ax + by = ax_0 + by_0 \\ &\Leftrightarrow ax + by = c . \end{aligned}$$

これより, 方程式 $ax + by = c$ で表される点集合 L について,

$$P \in L \Leftrightarrow (x, y) \in L \Leftrightarrow ax + by = c \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} // (b, -a) .$$

よって, 点集合 L はベクトル $(b, -a)$ を方向ベクトルとする直線である.

$$(a, b) \cdot (b, -a) = ab + b(-a) = 0 ,$$

よってベクトル (a, b) は L の方向ベクトル $(b, -a)$ と垂直なので, 定理 5.2.6 により (a, b) は L の法線ベクトルである.

証明終了

例 xy 座標平面において方程式 $4x - 6y = 5$ が表す直線 L の方向ベクトルの一つは、定理 5.3.4 より、 $(-6, -4)$ である．このベクトルに平行なベクトル $(3, 2)$ はやはり L の方向ベクトルである． L の方向ベクトルの一つは $(3, 2)$ である．

終

問5.3.4 xy 座標平面において方程式 $8x - 6y = 7$ が表す直線 L の一つの方
向ベクトルを求めよ.

直線 L の方向ベクトルの一つは $(-6, -8)$ である. このベクトルに平行な
ベクトル $(3, 4)$ はやはり L の方向ベクトルである. L の方向ベクトルの一つ
は $(3, 4)$ である. 終

例 xy 座標平面において方程式 $9x - 6y = 9$ が表す直線 L の法線ベクトルの一つは、定理 5.3.4 より、 $(9, -6)$ である．このベクトルに平行なベクトル $(3, -2)$ はやはり L の法線ベクトルである． L の方向ベクトルの一つは $(3, -2)$ である．

終

問5.3.5 xy 座標平面において方程式 $6x - 4y = 5$ が表す直線 L の一つの法線ベクトルを求めよ.

直線 L の法線ベクトルの一つは $(6, -4)$ である. このベクトルに平行なベクトル $(3, -2)$ はやはり L の法線ベクトルである. L の方向ベクトルの一つは $(3, -2)$ である. 終

例 xy 座標平面において，平面ベクトル $(7,8)$ を方向ベクトルとし点 $A = (6,1)$ が属す直線と，方程式 $2x - 3y = 15$ が表す直線との共有点 P を求める．原点を O とおく： $O = (0,0)$ ．ベクトル $(7,8)$ を方向ベクトルとし点 $A = (6,1)$ が属す直線に点 P が属するので，定理 5.1.6 より，ある実数 t をとると

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t(7,8) = (6,1) + (7t,8t) = (6+7t,1+8t) ,$$

よって $P = (7t+6,8t+1)$ ． P は方程式 $2x - 3y = 15$ が表す直線に属するので， $2(7t+6) - 3(8t+1) = 15$ ， $-10t + 9 = 15$ ， $t = -\frac{3}{5}$ ．従って

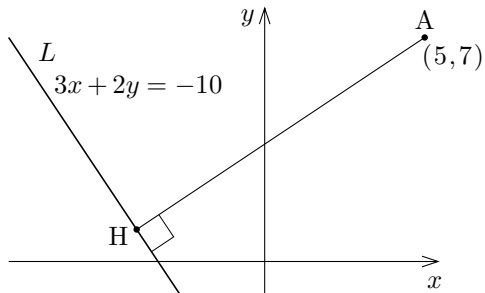
$$P = (7t+6,8t+1) = \left(\frac{9}{5}, -\frac{19}{5}\right) .$$

終

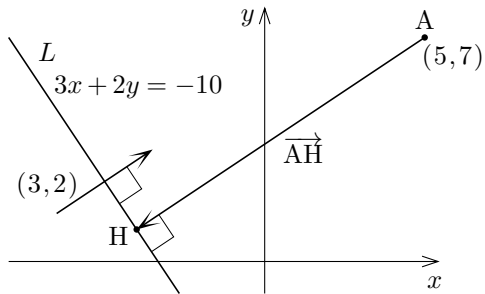
問5.3.6 xy 座標平面において、平面ベクトル $(-5, 2)$ を方向ベクトルとして点 $(-4, -2)$ が属す直線と、方程式 $4x + 3y = 13$ が表す直線との共有点 P を求めよ.

点 P が平面ベクトル $(-5, 2)$ を方向ベクトルとして点 $(-4, -2)$ が属す直線に属するので、ある実数 t をとると、 P の位置ベクトルは $t(-5, 2) + (-4, -2) = (-5t - 4, 2t - 2)$. 更に P が方程式 $4x + 3y = 13$ が表す直線に属するので、 $4(-5t - 4) + 3(2t - 2) = 13$, $-14t - 22 = 13$, $t = -\frac{5}{2}$.
従って $P = \left(\frac{17}{2}, -7\right)$. 終

例 xy 座標平面において点 $A = (5, 7)$ から方程式 $3x + 2y = -10$ が表す直線 L へ下した垂線の足 H を求める.

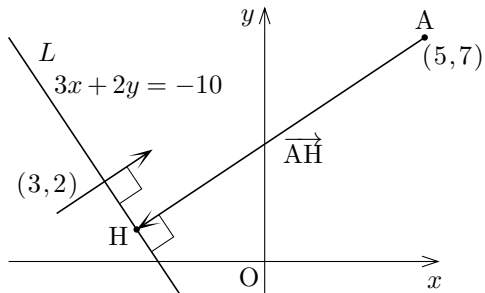


例 xy 座標平面において点 $A = (5, 7)$ から方程式 $3x + 2y = -10$ が表す直線 L へ下した垂線の足 H を求める. 方程式 $3x + 2y = -10$ が表す直線 L の法線ベクトル $(3, 2)$ と直線 AH の方向ベクトル $\overrightarrow{AH}$ とが平行なので, ベクトル $(3, 2)$ は直線 AH の方向ベクトルである.



例 xy 座標平面において点 $A = (5, 7)$ から方程式 $3x + 2y = -10$ が表す直線 L へ下した垂線の足 H を求める. 方程式 $3x + 2y = -10$ が表す直線 L の法線ベクトル $(3, 2)$ と直線 AH の方向ベクトル $\overrightarrow{AH}$ とが平行なので, ベクトル $(3, 2)$ は直線 AH の方向ベクトルである. 原点 $(0, 0)$ を O とおく. 点 H は直線 AH に属するので, 定理 5.1.6 により, ある実数 t をとると

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + t(3, 2) = (5, 7) + t(3, 2) = (3t + 5, 2t + 7).$$



例 xy 座標平面において点 $A = (5, 7)$ から方程式 $3x + 2y = -10$ が表す直線 L へ下した垂線の足 H を求める．方程式 $3x + 2y = -10$ が表す直線 L の法線ベクトル $(3, 2)$ と直線 AH の方向ベクトル $\overrightarrow{AH}$ とが平行なので，ベクトル $(3, 2)$ は直線 AH の方向ベクトルである．原点 $(0, 0)$ を O とおく．点 H は直線 AH に属するので，定理 5.1.6 により，ある実数 t をとると

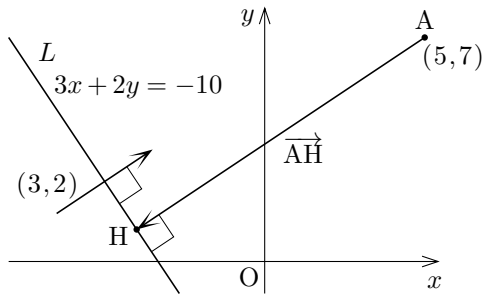
$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + t(3, 2) = (5, 7) + t(3, 2) = (3t + 5, 2t + 7) .$$

$(3t + 5, 2t + 7) = H \in L$ なので，

$$3(3t + 5) + 2(2t + 7) = -10 ,$$

$$13t = -39 ,$$

$$t = -3 .$$



例 xy 座標平面において点 $A = (5, 7)$ から方程式 $3x + 2y = -10$ が表す直線 L へ下した垂線の足 H を求める. 方程式 $3x + 2y = -10$ が表す直線 L の法線ベクトル $(3, 2)$ と直線 AH の方向ベクトル $\overrightarrow{AH}$ とが平行なので, ベクトル $(3, 2)$ は直線 AH の方向ベクトルである. 原点 $(0, 0)$ を O とおく. 点 H は直線 AH に属するので, 定理 5.1.6 により, ある実数 t をとると

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + t(3, 2) = (5, 7) + t(3, 2) = (3t + 5, 2t + 7) .$$

$(3t + 5, 2t + 7) = H \in L$ なので,

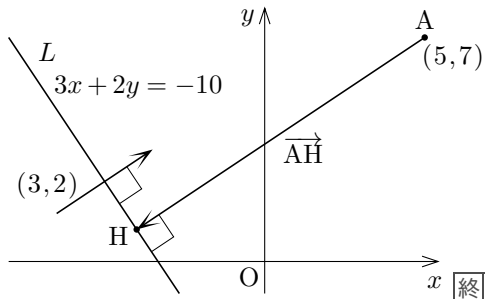
$$3(3t + 5) + 2(2t + 7) = -10 ,$$

$$13t = -39 ,$$

$$t = -3 .$$

よって

$$H = (3t + 5, 2t + 7) = (-4, 1) .$$



問5.3.7 xy 座標平面において点 $A = (-5, 7)$ から方程式 $4x - 2y = 11$ が表す直線 L へ下した垂線の足 H を求めよ.

直線 L の法線ベクトル $(4, -2)$ と直線 AH の方向ベクトル $\overrightarrow{AH}$ とが平行なので、ベクトル $(4, -2)$ は直線 AH の方向ベクトルである. 原点 $(0, 0)$ を O とおく. 点 H は直線 AH に属するので、ある実数 t をとると

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + t(4, -2) = (-5, 7) + t(4, -2) = (4t - 5, -2t + 7,).$$

$(4t - 5, -2t + 7,) = H \in L$ なので、

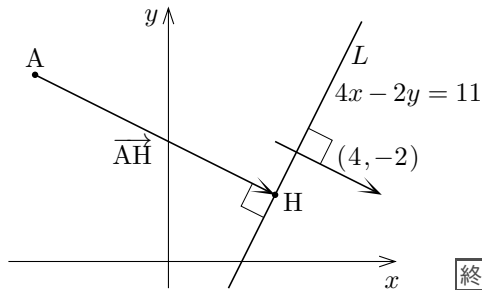
$$4(4t - 5) - 2(-2t + 7) = 11,$$

$$20t = 45,$$

$$t = \frac{9}{4}.$$

よって

$$H = (4t - 5, -2t + 7,) = \left(4, \frac{5}{2}\right).$$



座標平面 $\mathbf{R}^2$ における直線 L に属す点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) と (x_1, y_1, x_2, y_2 は実数) に対して, $x_1 \neq x_2$ のとき $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ の値を L の傾きという. 直線 L に対してその傾きがあるならば唯一つだけである. $x_1 = x_2$ のとき, 直線 L は x 軸と垂直であり, L の傾きはない.

[定理 5.3.4] xy 座標平面における直線 L について,

L の傾きがある $\Leftrightarrow L$ は x 軸と垂直でない $\Leftrightarrow L$ は y 軸と平行でない .

座標平面 $\mathbf{R}^2$ における直線 L に属す点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) と (x_1, y_1, x_2, y_2) は実数) について $x_1 \neq x_2$ とする. 定理 5.1.4 により ベクトル $(x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ は L の方向ベクトルである. $x_1 - x_2 \neq 0$. ベクトル $\frac{1}{x_1 - x_2}(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \left(1, \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)$ は, ベクトル $(x_1 - x_2, y_1 - y_2)$ と平行なので, 定理 5.1.2 により直線 L の方向ベクトルである: この第 2 成分 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ は L の傾きである.

一般的に, 直線 L の方向ベクトル (p, q) の第 1 成分 p の値が 0 でなければ, (p, q) を p で割ったベクトル $\left(1, \frac{q}{p}\right)$ は L の方向ベクトルであり, その第 2 成分 $\frac{q}{p}$ が L の傾きである.

直線 L の傾きが a であるとき，ベクトル $(1, a)$ が L の方向ベクトルである．定理 5.3.3 により，ある定数 b をとると L は方程式 $ax - y = -b$ つまり $y = ax + b$ で表される．

[定理 5.3.5] xy 座標平面における直線 L の傾きが a であるとき，ベクトル $(1, a)$ は L の方向ベクトルであり，ある定数 b をとると L は方程式 $y = ax + b$ で表される．

xy 座標平面における直線を $y = ax + b$ (a, b は定数) の形の方程式で表すこともあるが，この形の方程式は x 軸に垂直な直線を表せないことに留意すること．