

5.2

座標平面における直線の法線ベクトル

この節では座標平面 $\mathbf{R}^2$ における直線について考える.

[定理 5.2.1] 実数 a と b と平面ベクトル v について, $v \perp (a, b)$ と $v \parallel (b, -a)$ とが同値である.

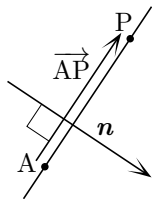
証明 $v = (v_1, v_2)$ とおく. 定理 4.3.5 により,

$$\begin{aligned}(v_1, v_2) \parallel (b, -a) &\Leftrightarrow v_1(-a) = v_2b \Leftrightarrow v_1a + v_2b = 0 \\&\Leftrightarrow (v_1, v_2) \cdot (a, b) = 0 \\&\Leftrightarrow (v_1, v_2) \perp (a, b) .\end{aligned}$$

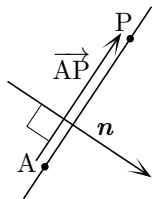
終

前節で述べたように、座標空間において、零ベクトルでないベクトル k と定点 A とに対して、 $\overrightarrow{AP} \parallel k$ となる点 P の全体は直線である。

前節で述べたように，座標空間において，零ベクトルでないベクトル k と定点 A に対して， $\overrightarrow{AP} \parallel k$ となる点 P の全体は直線である．座標平面 $\mathbf{R}^2$ では，零ベクトルでないベクトル n と定点 A に対して， $\overrightarrow{AP} \perp n$ となる点 P の全体も直線になる．



前節で述べたように、座標空間において、零ベクトルでないベクトル k と定点 A に対して、 $\overrightarrow{AP} \parallel k$ となる点 P の全体は直線である．座標平面 $\mathbf{R}^2$ では、零ベクトルでないベクトル n と定点 A に対して、 $\overrightarrow{AP} \perp n$ となる点 P の全体も直線になる．



[定理 5.2.2] 実数 a と b について $a \neq 0$ または $b \neq 0$ とする．座標平面 $\mathbf{R}^2$ において、各点 A に対して、 $\overrightarrow{AP} \perp (a, b)$ となる点 P の全体はベクトル $(b, -a)$ を方向ベクトルとする直線である．

[証明] $a \neq 0$ または $b \neq 0$ なので $(b, -a) \neq \mathbf{0}$ ． $\overrightarrow{AP} \perp (a, b)$ である点 P の全体を L とおく．各点 P について、定理 5.2.1 により、各点 P について、

$$P \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp (a, b) \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \parallel (b, -a) .$$

点集合 L はベクトル $(b, -a)$ を方向ベクトルとする直線である．

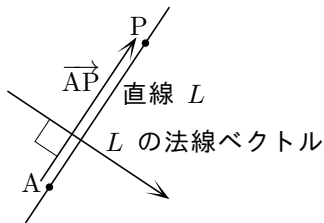
[証明終了]

零ベクトルでないベクトル n が直線 L の法線ベクトルであるとは、 n と L とが垂直であることである.

零ベクトルでないベクトル n が直線 L の法線ベクトルであるとは、 n と L とが垂直であることである．正確には次のように定義する．

[定義] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において，零ベクトルでないベクトル n が直線 L の法線ベクトルであるとを次のように定義する：ある点 A をとると，

各点 P について $P \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp n$.



座標平面 $\mathbf{R}^2$ において、直線 L に対してある点 A と L の任意の法線ベクトル n とをとると、

$$\text{各点 } P \text{ について } P \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp n .$$

このような点 A として L に属す総ての点が当てはまる.

座標平面 $\mathbf{R}^2$ において，直線 L に対してある点 A と L の任意の法線ベクトル n とをとると，

$$\text{各点 } P \text{ について } P \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp n .$$

このような点 A として L に属す総ての点が当てはまる．

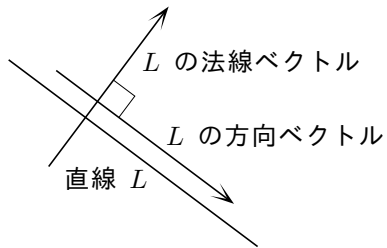
[定理 5.2.3] 座標空間における点集合 L と点 A と零ベクトルでないベクトル n について， L が直線でありかつ $A \in F$ かつ n が L の法線ベクトルであることは次のことと同値である：

$$\text{各点 } P \text{ について } P \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \perp n .$$

証明は省く．

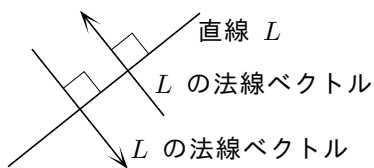
[定理 5.2.4] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において、直線 L の任意の方向ベクトルと L の任意の法線ベクトルとが垂直である。

証明は省く。

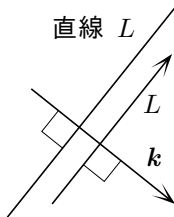


[定理 5.2.5] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において、直線の任意の 2 個の法線ベクトルは平行である。

証明は省く。



[定理 5.2.6] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において、直線 L のある方向ベクトルと垂直で零ベクトルでない任意のベクトルは L の法線ベクトルである。

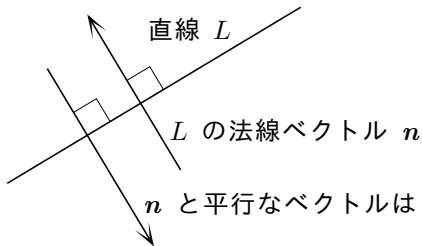


L の方向ベクトル k

k と垂直なベクトルは L の法線ベクトル

証明は省く。

[定理 5.2.7] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において、直線 L のある法線ベクトルと平行で零ベクトルでない任意のベクトルは L の法線ベクトルである。

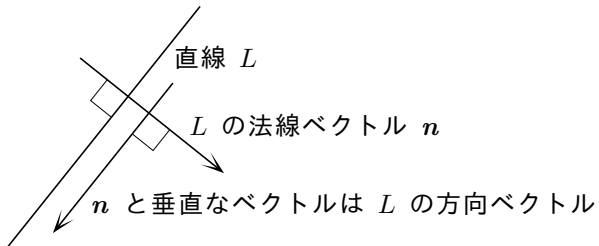


n と平行なベクトルは L の法線ベクトル

証明は省く。

[定理 5.2.8] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において、直線 L のある法線ベクトルと垂直で零ベクトルでない任意のベクトルは L の方向ベクトルである.

証明は省く.



例 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において直線 L の方向ベクトルの一つが $(6, 9)$ であるとする． L の法線ベクトルの一つを求める．定理 5.1.2 により， L の方向ベクトル $(6, 9)$ と平行なベクトル $(2, 3)$ はやはり L の方向ベクトルである．

$$(2, 3) \cdot (3, -2) = 6 - 6 = 0 ,$$

よって $(3, -2) \perp (2, 3)$ ．ベクトル $(3, -2)$ は， L の方向ベクトル $(2, 3)$ と垂直なので，定理 5.2.6 により， L の法線ベクトルである．故に L の法線ベクトルの一つは $(3, -2)$ である．

終

問5.2.1 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において直線 L の方向ベクトルの一つが $(4, -6)$ であるとする. L の法線ベクトルの一つを求めよ.

L の方向ベクトル $(4, -6)$ と平行なベクトル $(2, -3)$ はやはり L の方向ベクトルである.

$$(2, -3) \cdot (3, 2) = 6 - 6 = 0 ,$$

ベクトル $(3, 2)$ は, L の方向ベクトル $(2, -3)$ と垂直なので, L の法線ベクトルである. 故に L の法線ベクトルの一つは $(3, 2)$ である. **終**

例 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において直線 L の法線ベクトルの一つが $(6, -4)$ であるとする． L の方向ベクトルの一つを求める．定理 5.2.7 により， L の法線ベクトル $(6, -4)$ と平行なベクトル $(3, -2)$ はやはり L の法線ベクトルである．

$$(3, -2) \cdot (2, 3) = 6 - 6 = 0 ,$$

よって $(2, 3) \perp (3, -2)$ ．ベクトル $(2, 3)$ は， L の法線ベクトル $(3, -2)$ と垂直なので，定理 5.2.8 により， L の方向ベクトルである．故に L の法線ベクトルの一つは $(2, 3)$ である．

終

問5.2.2 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において直線 L の法線ベクトルの一つが $(9,6)$ であるとする. L の方向ベクトルの一つを求めよ.

L の法線ベクトル $(9,6)$ と平行なベクトル $(3,2)$ はやはり L の法線ベクトルである.

$$(2,-3) \cdot (3,2) = 6 - 6 = 0,$$

ベクトル $(2,-3)$ は, L の法線ベクトル $(3,2)$ と垂直なので, L の方向ベクトルである. 故に L の法線ベクトルの一つは $(2,-3)$ である. **終**

例 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 $(2, -3)$ と点 $(6, 7)$ とが属す直線 L の法線ベクトルを一つ求める． L の方向ベクトルの一つは $(6, 7) - (2, -3) = (4, 10)$ ．定理 5.1.2 により，ベクトル $(4, 10)$ と平行なベクトル $(2, 5)$ も L の方向ベクトルである．

$$(2, 5) \cdot (5, -2) = 10 - 10 = 0 .$$

よって $(2, 5) \perp (5, -2)$ ．ベクトル $(5, -2)$ は， L の方向ベクトル $(2, 5)$ と垂直なので，定理 5.2.6 により， L の法線ベクトルである．故に L の法線ベクトルの一つは $(5, -2)$ である．

終

問5.2.3 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 $(5,2)$ と点 $(-3,8)$ とが属す直線 L の法線ベクトルを一つ求めよ.

L の方向ベクトルの一つは $(-3,8) - (5,2) = (-8,6)$. このベクトルと平行なベクトル $(-4,3)$ も L の方向ベクトルである.

$$(-4,3) \cdot (3,4) = 0 .$$

ベクトル $(3,4)$ は, L の方向ベクトル $(-4,3)$ と垂直なので, L の法線ベクトルである. 故に L の法線ベクトルの一つは $(3,4)$ である. **終**