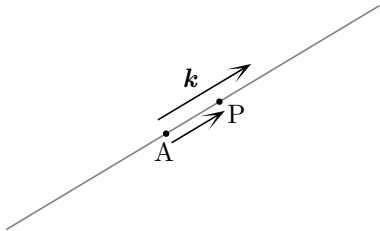


## 5.1

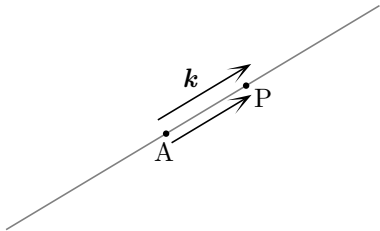
### 直線の方法ベクトル

座標空間において、直線はある定点から一定の方向に限りなく伸びる図形である．この“一定の方向”をベクトルで表す．

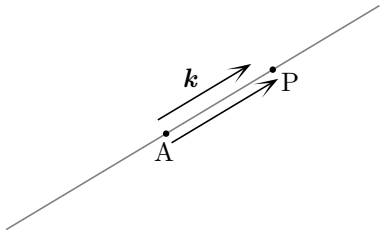
座標空間において、直線はある定点から一定の方向に限りなく伸びる図形である．この“一定の方向”をベクトルで表す．直線は、零ベクトルでないベクトル  $k$  の始点と方向とを変えずに伸縮したり逆向きにしたベクトルの終点の全体である．



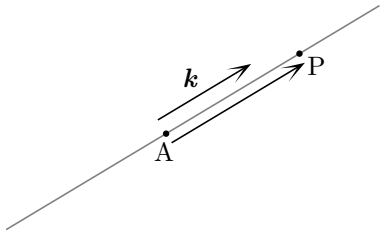
座標空間において，直線はある定点から一定の方向に限りなく伸びる図形である．この“一定の方向”をベクトルで表す．直線は，零ベクトルでないベクトル  $k$  の始点と方向とを変えずに伸縮したり逆向きにしたベクトルの終点の全体である．



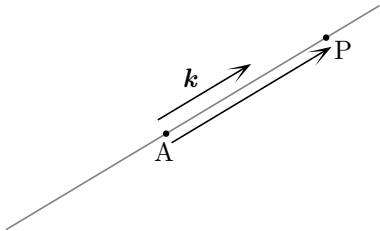
座標空間において，直線はある定点から一定の方向に限りなく伸びる図形である．この“一定の方向”をベクトルで表す．直線は，零ベクトルでないベクトル  $k$  の始点と方向とを変えずに伸縮したり逆向きにしたベクトルの終点の全体である．



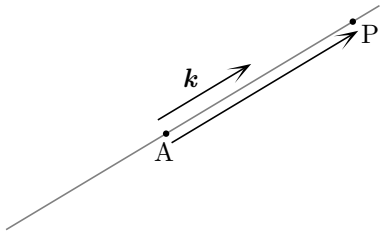
座標空間において、直線はある定点から一定の方向に限りなく伸びる図形である．この“一定の方向”をベクトルで表す．直線は、零ベクトルでないベクトル  $k$  の始点と方向とを変えずに伸縮したり逆向きにしたベクトルの終点の全体である．



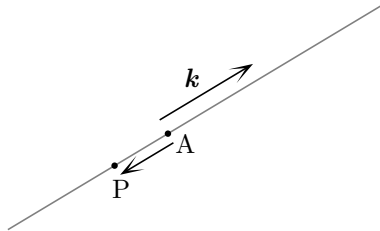
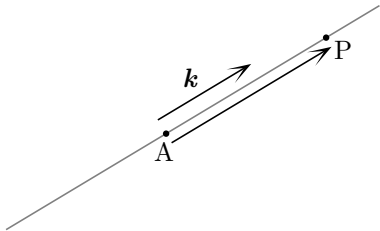
座標空間において，直線はある定点から一定の方向に限りなく伸びる図形である．この“一定の方向”をベクトルで表す．直線は，零ベクトルでないベクトル  $k$  の始点と方向とを変えずに伸縮したり逆向きにしたベクトルの終点の全体である．



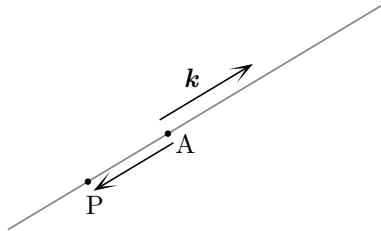
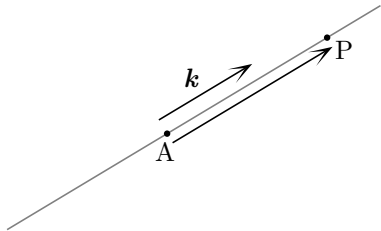
座標空間において，直線はある定点から一定の方向に限りなく伸びる図形である．この“一定の方向”をベクトルで表す．直線は，零ベクトルでないベクトル  $k$  の始点と方向とを変えずに伸縮したり逆向きにしたベクトルの終点の全体である．



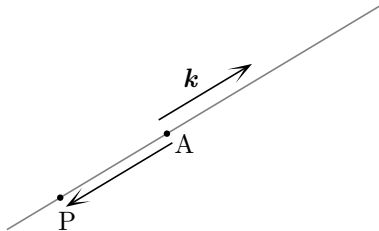
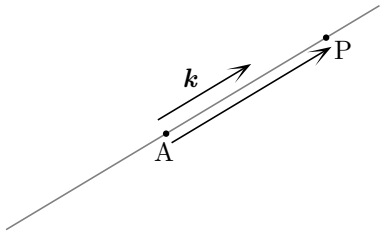
座標空間において、直線はある定点から一定の方向に限りなく伸びる図形である．この“一定の方向”をベクトルで表す．直線は，零ベクトルでないベクトル  $k$  の始点と方向とを変えずに伸縮したり逆向きにしたベクトルの終点の全体である．



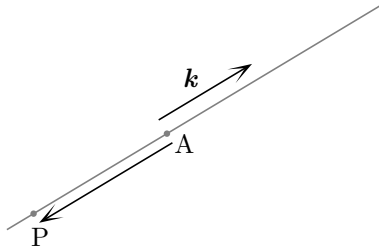
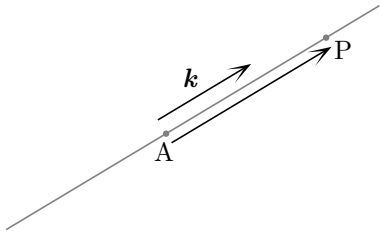
座標空間において、直線はある定点から一定の方向に限りなく伸びる図形である．この“一定の方向”をベクトルで表す．直線は、零ベクトルでないベクトル  $k$  の始点と方向とを変えずに伸縮したり逆向きにしたベクトルの終点の全体である．



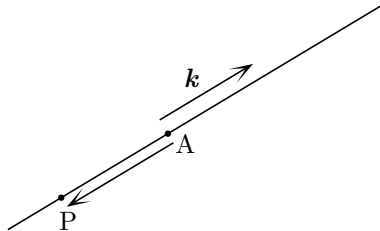
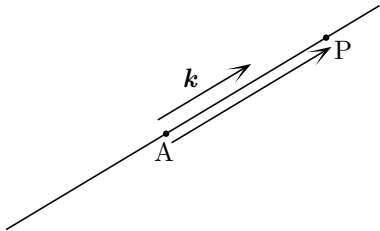
座標空間において、直線はある定点から一定の方向に限りなく伸びる図形である．この“一定の方向”をベクトルで表す．直線は，零ベクトルでないベクトル  $k$  の始点と方向とを変えずに伸縮したり逆向きにしたベクトルの終点の全体である．



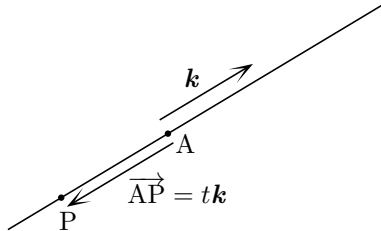
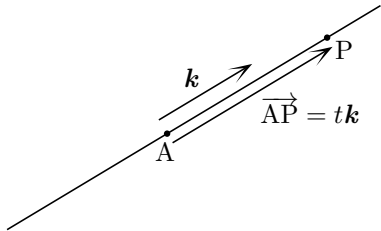
座標空間において、直線はある定点から一定の方向に限りなく伸びる図形である．この“一定の方向”をベクトルで表す．直線は、零ベクトルでないベクトル  $k$  の始点と方向とを変えずに伸縮したり逆向きにしたベクトルの終点の全体である．



座標空間において，直線はある定点から一定の方向に限りなく伸びる図形である．この“一定の方向”をベクトルで表す．直線は，零ベクトルでないベクトル  $k$  の始点と方向とを変えずに伸縮したり逆向きにしたベクトルの終点の全体である．ベクトル  $k$  を方向を変えずに伸縮することや逆向きにすることは， $k$  に実数を掛けることである．



座標空間において、直線はある定点から一定の方向に限りなく伸びる図形である．この“一定の方向”をベクトルで表す．直線は、零ベクトルでないベクトル  $k$  の始点と方向とを変えずに伸縮したり逆向きにしたベクトルの終点の全体である．ベクトル  $k$  を方向を変えずに伸縮することや逆向きにすることは、 $k$  に実数を掛けることである．直線は、零ベクトルでないベクトル  $k$  に実数を掛けたベクトルの始点をある点  $A$  に定めたときの終点の全体である．つまり、直線は、実数  $t$  に対して  $\overrightarrow{AP} = tk$  となる点  $P$  の全体である．



座標空間において、任意の直線  $L$  は、ある点  $A$  と零ベクトルでないあるベクトル  $k$  とに対して、ある実数  $t$  をとると  $\overrightarrow{AP} = tk$  である点  $P$  の全体である：各点  $P$  について

$$P \in L \Leftrightarrow \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{AP} = tk .$$

座標空間において、任意の直線  $L$  は、ある点  $A$  と零ベクトルでないあるベクトル  $k$  とに対して、ある実数  $t$  をとると  $\overrightarrow{AP} = tk$  である点  $P$  の全体である：各点  $P$  について

$$P \in L \Leftrightarrow \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{AP} = tk .$$

$k \neq 0$  なので、

$$\overrightarrow{AP} // k \Leftrightarrow \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{AP} = tk .$$

座標空間において、任意の直線  $L$  は、ある点  $A$  と零ベクトルでないあるベクトル  $k$  とに対して、ある実数  $t$  をとると  $\overrightarrow{AP} = tk$  である点  $P$  の全体である：各点  $P$  について

$$P \in L \Leftrightarrow \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{AP} = tk .$$

$k \neq 0$  なので、

$$\overrightarrow{AP} // k \Leftrightarrow \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{AP} = tk .$$

よって、各点  $P$  について

$$P \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} // k .$$

このようなベクトル  $k$  を  $L$  の方向ベクトルという.

座標空間において、任意の直線  $L$  は、ある点  $A$  と零ベクトルでないあるベクトル  $k$  とに対して、ある実数  $t$  をとると  $\overrightarrow{AP} = tk$  である点  $P$  の全体である：各点  $P$  について

$$P \in L \Leftrightarrow \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{AP} = tk .$$

$k \neq 0$  なので、

$$\overrightarrow{AP} // k \Leftrightarrow \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{AP} = tk .$$

よって、各点  $P$  について

$$P \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} // k .$$

このようなベクトル  $k$  を  $L$  の方向ベクトルという。

[定義] 座標空間において、零ベクトルでないベクトル  $k$  が直線  $L$  の方向ベクトルであることを次のように定義する：ある点  $A$  をとると、

$$\text{各点 } P \text{ について } P \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} // k .$$

座標空間において、直線  $L$  に対してある点  $A$  と  $L$  の任意の方向ベクトル  $k$  とをとると、

$$\text{各点 } P \text{ について } P \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \parallel k .$$

このような点  $A$  として  $L$  に属す総ての点が当てはまる.

座標空間において、直線  $L$  に対してある点  $A$  と  $L$  の任意の方向ベクトル  $k$  とをとると、

$$\text{各点 } P \text{ について } P \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \parallel k .$$

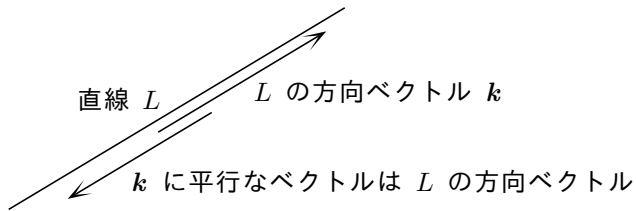
このような点  $A$  として  $L$  に属す総ての点が当てはまる.

[定理 5.1.1] 座標空間における点集合  $L$  と点  $A$  と零ベクトルでないベクトル  $k$  について、 $L$  が直線でありかつ  $A \in L$  かつ  $k$  が  $L$  の方向ベクトルであることは次のことと同値である：

$$\text{各点 } P \text{ について } P \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \parallel k .$$

証明は省く.

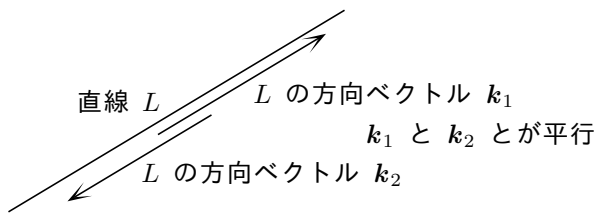
座標空間における直線  $L$  の方向ベクトル  $k$  に平行なベクトルは、 $L$  と平行であるので、零ベクトルでなければ  $L$  の方向ベクトルである。



**[定理 5.1.2]** 座標空間において、直線  $L$  のある方向ベクトルと平行な零ベクトルでない各ベクトルは  $L$  の方向ベクトルである。

証明は省く。

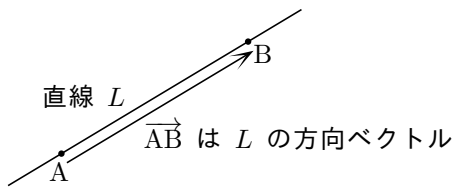
座標空間における直線  $L$  の方向ベクトル  $k_1$  と  $k_2$  はどちらも  $L$  に平行であるから、 $k_1$  と  $k_2$  とが平行である。



**[定理 5.1.3]** 座標空間において、一つの直線の任意の 2 個の方向ベクトルは平行である。

証明は省く。

座標空間における直線  $L$  に属  
す点  $A$  と  $B$  について、ベクトル  
 $\overrightarrow{AB}$  は  $L$  と平行であるので、  
 $A \neq B$  ならばベクトル  $\overrightarrow{AB}$  は  $L$   
の方向ベクトルである。



[定理 5.1.4] 座標空間において、直線  $L$  に属す各点  $A$  と  $B$  について、  
 $A \neq B$  ならば、ベクトル  $\overrightarrow{AB}$  は  $L$  の方向ベクトルである。

**例** 座標平面の点  $(7,4)$  と点  $(1,-5)$  とが属す直線  $L$  の方向ベクトルを一つ求める．定理 5.1.4 により， $L$  の方向ベクトルの一つは  $(1,-5) - (7,4) = (-6,-9)$  である．定理 5.1.2 により，ベクトル  $(-6,-9)$  に平行で零ベクトルでないベクトルは  $L$  の方向ベクトルなので， $L$  の方向ベクトルの一つは  $(2,3)$  である． **終**

**問5.1.1** 座標平面の点  $(8,5)$  と点  $(2,-3)$  とが属す直線  $L$  の方向ベクトルを一つ求めよ.

$L$  の方向ベクトルの一つは  $(2,-3)-(8,5)=(-6,-8)$ . このベクトルに平行なベクトル  $(3,4)$  も  $L$  の方向ベクトルである.  $L$  の方向ベクトルの一つは  $(3,4)$  である.

**例** 3次元座標空間の点  $(9, -6, 7)$  と点  $(5, 2, 1)$  とが属す直線  $L$  の方向ベクトルを一つ求める．定理 5.1.4 により， $L$  の方向ベクトルの一つは  $(5, 2, 1) - (9, -6, 7) = (-4, 8, -6)$  である．定理 5.1.2 により，ベクトル  $(-4, 8, -6)$  に平行で零ベクトルでないベクトルは  $L$  の方向ベクトルなので， $L$  の方向ベクトルの一つは  $(2, -4, 3)$  である． **終**

**問5.1.2** 3次元座標空間の点  $(4, 7, 2)$  と点  $(1, -2, 8)$  とが属す直線  $L$  の方向ベクトルを一つ求めよ.

$L$  の方向ベクトルの一つは  $(1, -2, 8) - (4, 7, 2) = (-3, -9, 6)$  . このベクトルに平行なベクトル  $(1, 3, -2)$  も  $L$  の方向ベクトルである.  $L$  の方向ベクトルの一つは  $(1, 3, -2)$  である.

終

[定理 5.1.5] 座標空間の各点  $A$  と  $B$  と  $C$  について,

$A$  と  $B$  と  $C$  とが属す直線がある  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{AC}$  .

**例** 変数  $x$  について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める：座標平面において点  $A = (x, 6)$  と  $B = (3, 2x)$  と  $C = (4, 8)$  とが属す直線がある．点  $A$  と  $B$  と  $C$  とが属す直線がある条件は  $\overrightarrow{CA} \parallel \overrightarrow{CB}$  ．

$$\overrightarrow{CA} = (x, 6) - (4, 8) = (x - 4, -2) ,$$

$$\overrightarrow{CB} = (3, 2x) - (4, 8) = (-1, 2x - 8) .$$

定理 4.5.5 により,

$$\overrightarrow{CA} \parallel \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow (x - 4, -2) \parallel (-1, 2x - 8)$$

$$\Leftrightarrow (x - 4)(2x - 8) = -2 \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 16x + 30 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ または } x = 5$$

点  $A$  と  $B$  と  $C$  とが属す直線がある条件は,  $x = 3$  または  $x = 5$  ．

**終**

**問5.1.3** 変数  $x$  について次の条件と同値でなるべく簡単な条件を求める：座標平面において点  $A = (7, x+2)$  と  $B = (x, x)$  と  $C = (x+3, 6)$  とが属す直線がある．

$$\overrightarrow{BA} = (7, x+2) - (x, x) = (7-x, 2) ,$$

$$\overrightarrow{BC} = (x+3, 6) - (x, x) = (3, 6-x) ,$$

点  $A$  と  $B$  と  $C$  とが属す直線がある条件は  $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{BC}$  ．

$$\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (7-x, 2) \parallel (3, 6-x) \Leftrightarrow (7-x)(6-x) = 2 \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 13x + 36 = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x-9) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 4 \text{ または } x = 9 .$$

点  $A$  と  $B$  と  $C$  とが属す直線がある条件は，  $x = 4$  または  $x = 9$  ．

**終**

**例** 変数  $x$  と  $y$  について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める：3次元座標空間において点  $A = (x, y, 4)$  と  $B = (1, x, 2)$  と  $C = (y, 8, 8)$  とが属す直線がある．点  $A$  と  $B$  と  $C$  とが属す直線がある条件は  $\overrightarrow{BA} \parallel \overrightarrow{BC}$  ．

$$\overrightarrow{BA} = (x, y, 4) - (1, x, 2) = (x-1, y-x, 2) ,$$

$$\overrightarrow{BC} = (y, 8, 8) - (1, x, 2) = (y-1, 8-x, 6) .$$

$(x-1, y-x, 2) \neq \mathbf{0}$  なので,

$$\overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow (y-1, 8-x, 6) \parallel (x-1, y-x, 2)$$

$\Leftrightarrow$  ある実数  $k$  をとると  $(y-1, 8-x, 6) = k(x-1, y-x, 2)$

$\Leftrightarrow$  ある実数  $k$  をとると  $y-1 = k(x-1)$  かつ  $8-x = k(y-x)$  かつ  $6 = 2k$  .

$6 = 2k$  より  $k = 3$  なので,  $y-1 = 3(x-1)$  かつ  $8-x = 3(y-x)$  , よって  $x = 2$  かつ  $y = 4$  . 点  $A$  と  $B$  と  $C$  とが属す直線がある条件は,  $x = 2$  かつ  $y = 4$  .

**終**

**問5.1.4** 変数  $x$  と  $z$  について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求めよ：3次元座標空間において点  $A = (x, 3, z)$  と  $B = (4, 9, x)$  と  $C = (z, 5, -3)$  とが属す直線がある。

$$\overrightarrow{BA} = (x, 3, z) - (4, 9, x) = (x-4, -6, z-x) ,$$

$$\overrightarrow{BC} = (z, 5, -3) - (4, 9, x) = (z-4, -4, -x-3) .$$

$$\overrightarrow{BA} // \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow (x-4, -6, z-x) // (z-4, -4, -x-3)$$

$$\Leftrightarrow \text{ある実数 } k \text{ をとると } (x-4, -6, z-x) = k(z-4, -4, -x-3)$$

$$\Leftrightarrow \text{ある実数 } k \text{ をとると } x-4 = k(z-4) \text{ かつ } -6 = -4k \text{ かつ } z-x = k(-x-3)$$

$$-6 = -4k \text{ より } k = \frac{3}{2} \text{ なので, } x-4 = \frac{3}{2}(z-4) \text{ かつ } z-x = \frac{3}{2}(-x-3) ,$$

$$\text{よって } x = -5 \text{ かつ } z = -2 . \text{ 点 } A \text{ と } B \text{ と } C \text{ とが属す直線がある条件は, } x = -5 \text{ かつ } z = -2 .$$

終

[定理 5.1.6] 座標空間において、直線  $L$  に属す各点  $A$  と  $L$  の各方向ベクトル  $k$  と各点  $B$  と各点  $P$  について、

$$P \in L \Leftrightarrow \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + tk.$$

**[証明]**  $A \in L$  で、ベクトル  $k$  は  $L$  の方向ベクトルであるとする.  $k \neq 0$  なので、定理 5.1.1 により、各点  $P$  について、

$$P \in L \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \parallel k$$

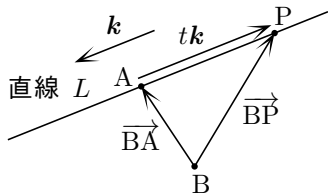
$$\Leftrightarrow \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{AP} = tk.$$

点  $B$  について  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BA}$  なので

$$\overrightarrow{AP} = tk \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BA} = tk \Leftrightarrow \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + tk.$$

よって

$$P \in L \Leftrightarrow \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BA} + tk.$$



証明終了

**例**  $xy$  座標平面の直線  $L$  について,  $(1, -5) \in L$  で, ベクトル  $(2, 3)$  が  $L$  の方向ベクトルであるとする.  $L$  に属す点  $P$  の  $x$  座標が  $9$  であるとする. この点  $P$  を求める. 原点  $(0, 0)$  を  $O$  とおく. 点  $P$  の  $x$  座標が  $9$  なので,  $P = (9, y)$  とおく.  $A = (1, -5)$  とおく.  $P \in L$  なので, 定理 5.1.6 により, ある実数  $t$  に対して,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t(2, 3) ,$$

$$(9, y) = (1, -5) + t(2, 3) ,$$

$$(9, y) = (1 + 2t, -5 + 3t) ,$$

$$9 = 1 + 2t \text{ かつ } y = -5 + 3t ;$$

$9 = 1 + 2t$  より  $t = 4$  , よって  $y = 7$  . 故に  $P = (9, 7)$  .

**終**

**問5.1.5**  $xy$  座標平面の直線  $L$  について,  $(-10, -12) \in L$  で, ベクトル  $(3, 4)$  が  $L$  の方向ベクトルであるとする.  $L$  に属す点  $P$  の  $y$  座標が  $8$  であるとする. この点  $P$  を求めよ.

原点  $(0, 0)$  を  $O$  とおく. 点  $P$  の  $y$  座標が  $8$  なので,  $P = (x, 8)$  とおく.  $A = (-10, -12)$  とおく.  $P \in L$  なので, ある実数  $t$  に対して,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t(3, 4) ,$$

$$(x, 8) = (-10, -12) + t(3, 4) ,$$

$$x = -10 + 3t \quad \text{かつ} \quad 8 = -12 + 4t ;$$

$14 = -6 + 4t$  より  $t = 5$  , よって  $x = 5$  . 故に  $P = (5, 8)$  .

**終**

**例**  $xyz$  座標空間の直線  $L$  について,  $(-5, 1, 7) \in L$  で, ベクトル  $(2, 3, -4)$  が  $L$  の方向ベクトルであるとする.  $L$  に属す点  $P$  の  $x$  座標と  $z$  座標とが等しいとする. この点  $P$  を求める. 原点  $(0, 0, 0)$  を  $O$  とおく. 点  $P$  の  $x$  座標と  $z$  座標とが等しいので,  $P = (x, y, x)$  とおく.  $A = (-5, 1, 7)$  とおく.  $P \in L$  なので, 定理 5.1.6 により, ある実数  $t$  に対して,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t(2, 3, -4) ,$$

$$(x, y, x) = (-5, 1, 7) + t(2, 3, -4) ,$$

$$(x, y, x) = (-5 + 2t, 1 + 3t, 7 - 4t) ,$$

$$x = 2t - 5 \quad \text{かつ} \quad y = 3t + 1 \quad \text{かつ} \quad x = 7 - 4t ;$$

$2t - 5 = 7 - 4t$  より  $t = 2$  ; よって,  $x = -1$  ,  $y = 7$  . 故に  $P = (-1, 7, -1)$  .

**終**

**問5.1.6**  $xyz$  座標空間の直線  $L$  について,  $(4, 9, -7) \in L$  で, ベクトル  $(2, -3, 5)$  が  $L$  の方向ベクトルであるとする.  $L$  に属す点  $P$  の  $y$  座標と  $z$  座標とが等しいとする. この点  $P$  を求めよ.

原点  $(0, 0, 0)$  を  $O$  とおく. 点  $P$  の  $y$  座標と  $z$  座標とが等しいので,  $P = (x, y, y)$  とおく.  $A = (4, 9, -7)$  とおく.  $P \in L$  なので, ある実数  $t$  に対して,

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t(2, -3, 5) ,$$

$$(x, y, y) = (4, 9, -7) + t(2, -3, 5) ,$$

$$x = 4 + 2t \quad \text{かつ} \quad y = 9 - 3t \quad \text{かつ} \quad y = 5t - 7 ;$$

$9 - 3t = 5t - 7$  より  $t = 2$  ; よって,  $x = 8$  ,  $y = 3$  . 故に  $P = (8, 3, 3)$  **終**

[定理 5.1.7] 座標空間の各点  $A, B, C, P$  について,  $A \neq B$  のとき,

点  $P$  が直線  $AB$  に属す  $\Leftrightarrow$  ある実数  $t$  をとると  $\overrightarrow{CP} = t\overrightarrow{CA} + (1-t)\overrightarrow{CB}$ .

**[証明]** 点  $A, B$  について  $A \neq B$  とする.  
直線  $AB$  を  $L$  とおく. 定理 5.1.4 により  
ベクトル  $\overrightarrow{BA}$  は直線  $L$  の方向ベクトル  
である. 点  $B$  は直線  $L$  に属するので, 定  
理 5.1.6 により, 各点  $P$  について,

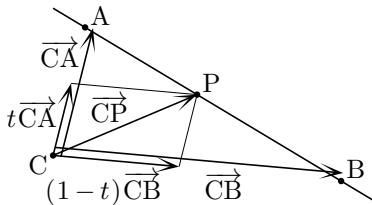
$$P \in L \Leftrightarrow \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CB} + t\overrightarrow{BA},$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} \text{ なので}$$

$$\overrightarrow{CA} + t\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} + t(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) = t\overrightarrow{CA} + (1-t)\overrightarrow{CB},$$

故に

$$P \text{ が直線 } AB \text{ に属す } \Leftrightarrow \text{ある実数 } t \text{ をとると } \overrightarrow{CP} = t\overrightarrow{CA} + (1-t)\overrightarrow{CB} \quad \boxed{\text{終}}$$



**例** 座標空間において点 A の位置ベクトル  $a$  と点 B の位置ベクトル  $b$  とが平行でないとする．次のような実数  $x$  を求める：ベクトル  $xa + x^2b$  を位置ベクトルとする点が直線 AB に属す． $a$  と  $b$  とが平行でないので， $a$  と  $b$  とが線形独立である． $xa + x^2b$  を位置ベクトルとする点が直線 AB に属す条件は，ある実数  $t$  をとると  $xa + x^2b = ta + (1-t)b$  ；よって， $x = t$  かつ  $x^2 = 1 - t$  なので， $x^2 = 1 - x$  ，  $x = -\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$  ． **終**

**問5.1.7** 座標空間において点  $A$  の位置ベクトル  $a$  と点  $B$  の位置ベクトル  $b$  とが平行でないとする．次のような実数  $x$  を求めよ：ベクトル  $x^2a - 2xb$  を位置ベクトルとする点が直線  $AB$  に属す．

$a$  と  $b$  とが線形独立である． $x^2a - 2xb$  を位置ベクトルとする点が直線  $AB$  に属す条件は，ある実数  $t$  をとると  $x^2a - 2xb = ta + (1-t)b$  ；よって， $x^2 = t$  かつ  $-2x = 1 - t$  なので， $-2x = 1 - x^2$ ， $x = 1 \pm \sqrt{2}$  ． **終**