

4.5

ベクトルの線形独立

複数のベクトルについて“線形独立”及び“線形従属”という概念がある；これらは後々重要になる．

[定義] 実ベクトル空間のベクトル a と b とが線形従属であることを次のように定義する：

ある実数 p と q について， $p \neq 0$ または $q \neq 0$ ， かつ， $pa + qb = \mathbf{0}$.
ベクトル a と b とが線形従属でないとき線形独立であるという.

[定義] 実ベクトル空間のベクトル a と b とが線形従属であることを次のように定義する：

ある実数 p と q について， $p \neq 0$ または $q \neq 0$ ， かつ， $pa + qb = 0$.
ベクトル a と b とが線形従属でないとき線形独立であるという.

線形独立は線形従属の否定である.

[定義] 実ベクトル空間のベクトル a と b とが線形従属であることを次のように定義する：

ある実数 p と q について、 $p \neq 0$ または $q \neq 0$ ，かつ、 $pa + qb = 0$.
ベクトル a と b とが線形従属でないとき線形独立であるという.

線形独立は線形従属の否定である. ベクトル a と b について、

$$pa + qb = 0 \text{ , かつ , } p \neq 0 \text{ または } q \neq 0$$

の否定は、

“ $pa + qb = 0$ ” でないか、または、“ $p \neq 0$ または $q \neq 0$ ” でない
つまり

$$pa + qb = 0 \text{ ならば } p = q = 0$$

である.

[定義] 実ベクトル空間のベクトル a と b とが線形従属であることを次のように定義する：

ある実数 p と q について、 $p \neq 0$ または $q \neq 0$ ，かつ、 $pa + qb = 0$.
ベクトル a と b とが線形従属でないとき線形独立であるという.

線形独立は線形従属の否定である. ベクトル a と b について、

$$pa + qb = 0 \text{ , かつ , } p \neq 0 \text{ または } q \neq 0$$

の否定は、

“ $pa + qb = 0$ ” でないか、または、“ $p \neq 0$ または $q \neq 0$ ” でない
つまり

$$pa + qb = 0 \text{ ならば } p = q = 0$$

である.

[定理 4.5.1] 実ベクトル空間のベクトル a と b とが線形独立であることは次の条件と同値である：

各実数 p と q について、 $pa + qb = 0$ ならば $p = q = 0$.

例 ベクトル平面のベクトル $(2,3)$ と $(4,5)$ とが線形独立であることを示す.
実数 p と q について $p(2,3) + q(4,5) = \mathbf{0}$ とする.

$$(2p + 4q, 3p + 5q) = (0, 0) ,$$

$$2p + 4q = 0 \quad \text{かつ} \quad 3p + 5q = 0 .$$

$2p + 4q = 0$ より、 $p + 2q = 0$, $p = -2q$, これを $3p + 5q = 0$ に代入すると、 $3(-2q) + 5q = 0$, $-q = 0$, $q = 0$; 更に $p = 2 \cdot (-2q) = 0$. このように、 $p(2,3) + q(4,5) = \mathbf{0}$ ならば $p = q = 0$. 定理 4.5.1 により、故にベクトル $(2,3)$ と $(4,5)$ とが線形独立である.

終

[定理 4.5.2] 実ベクトル空間のベクトル a と b について,

$$a \text{ と } b \text{ とが線形従属である} \Leftrightarrow a // b .$$

[証明] a と b とが線形従属であるとする. ある実数 p と q について,
 $p \neq 0$ または $q \neq 0$, かつ, $pa + qb = 0$. $p \neq 0$ のとき, $a = -\frac{q}{p}b$ なの
ので, $a // b$. $p = 0$ のとき, $q \neq 0$ かつ $qb = 0$ なので, $b = 0$, 定理
4.3.1 により $a // b$.

$a // b$ とする. $b = 0$ ならば, $0a + 1b = 0$, よって a と b とが
線形従属である. $b \neq 0$ ならば, ある実数 k について $a = kb$ なので
 $1a - kb = 0$, よって a と b とが線形従属である.

証明終了

[定理] 実ベクトル空間のベクトル a と b について,

a と b とが線形独立である $\Leftrightarrow a$ と b とが平行でない .

[証明] 定理 4.5.2 により,

a と b とが線形独立である $\Leftrightarrow a$ と b とが線形従属でない
 $\Leftrightarrow a$ と b とが平行でない .

[証明終了]

例 変数 x について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める：平面ベクトル $(x, 5)$ と $(3, x+2)$ とが線形独立である。

例 変数 x について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める：平面ベクトル $(x, 5)$ と $(3, x+2)$ とが線形独立である．定理 4.5.2 及び定理 4.3.5 より

ベクトル $(x, 5)$ と $(3, x+2)$ とが線形従属である

$\Leftrightarrow (x, 5) // (3, x+2)$

[定理 4.5.2] 実ベクトル空間のベクトル a と b について，

a と b とが線形従属である $\Leftrightarrow a // b$.

例 変数 x について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める：平面ベクトル $(x, 5)$ と $(3, x+2)$ とが線形独立である．定理 4.5.2 及び定理 4.3.5 より

ベクトル $(x, 5)$ と $(3, x+2)$ とが線形従属である

$$\Leftrightarrow (x, 5) // (3, x+2) \Leftrightarrow x(x+2) = 5 \cdot 3$$

[定理 4.3.5] 各実数 a, b, c, d について,

$$(a, b) // (c, d) \Leftrightarrow ad = bc .$$

例 変数 x について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める：平面ベクトル $(x, 5)$ と $(3, x+2)$ とが線形独立である．定理 4.5.2 及び定理 4.3.5 より

ベクトル $(x, 5)$ と $(3, x+2)$ とが線形従属である

$$\Leftrightarrow (x, 5) // (3, x+2) \Leftrightarrow x(x+2) = 5 \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ または } x = -5 .$$

例 変数 x について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める：平面ベクトル $(x, 5)$ と $(3, x+2)$ とが線形独立である．定理 4.5.2 及び定理 4.3.5 より

ベクトル $(x, 5)$ と $(3, x+2)$ とが線形従属である

$$\Leftrightarrow (x, 5) // (3, x+2) \Leftrightarrow x(x+2) = 5 \cdot 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 15 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ または } x = -5 .$$

よって

ベクトル $(x, 5)$ と $(3, x+2)$ とが線形独立である

$\Leftrightarrow$ ベクトル $(x, 5)$ と $(3, x+2)$ とが線形従属でない

$\Leftrightarrow x \neq 3$ かつ $x \neq -5$.

終

問4.5.1 変数 x について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める：平面ベクトル $(x, -3)$ と $(2, x-5)$ とが線形独立である。

ベクトル $(x, -3)$ と $(2, x-5)$ とが線形従属である

$$\Leftrightarrow (x, -3) // (2, x-5) \Leftrightarrow x(x-5) = -3 \cdot 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ または } x = 3 .$$

よって

ベクトル $(x, -3)$ と $(2, x-5)$ とが線形独立である

$$\Leftrightarrow \text{ベクトル } (x, -3) \text{ と } (2, x-5) \text{ とが線形従属でない}$$

$$\Leftrightarrow x \neq 2 \text{ かつ } x \neq 3 .$$

終

定理 4.5.1 から以下の定理が導かれる.

[定理 4.5.3] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b について, a と b とが線形独立であるならば, 実数 p, q について,

$$pa + qb = \mathbf{0} \Leftrightarrow p = 0 \text{ かつ } q = 0 ,$$

$$p \neq 0 \text{ または } q \neq 0 \Leftrightarrow pa + qb \neq \mathbf{0} .$$

[定理 4.5.4] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b について, a と b とが線形独立であるならば, 各実数 p, q, r, s について, $pa + qb = ra + sb$ ならば $p = r$ かつ $q = s$.

例 実ベクトル空間のベクトル a と b とが平行でないとする．次のような実数 x と y とを求める： $(2x+3y+4)a+(5x+6y+7)b=0$ ．
 a と b とが，平行でないので，線形独立である．定理 4.5.3 より，
 $(2x+3y+4)a+(5x+6y+7)b=0$ となる条件は， $2x+3y+4=0$ かつ $5x+6y+7=0$ ；この連立方程式を解くと $x=1$ かつ $y=-2$ ． **終**

問4.5.2 実ベクトル空間のベクトル a と b とが平行でないとする．次のような実数 x と y とを求めよ： $(2x+3y-4)a+(6x+7y-8)b=0$ ．

a と b とが，平行でないので，線形独立である． $(2x+3y-4)a+(6x+7y-8)b=0$ となる条件は， $2x+3y-4=0$ かつ $6x+7y-8=0$ ，この連立方程式を解くと $x=-1$ かつ $y=2$ ．

例 実ベクトル空間のベクトル a と b とが平行でないとする．次のような実数 x と y とを求める： $(5x - 4y)a + (7x - 6y)b = 7a + 9b$ ． a と b とが，平行でないので，線形独立である．定理 4.5.4 より， $(5x - 4y)a + (7x - 6y)b = 7a + 9b$ となる条件は， $5x - 4y = 7$ かつ $7x - 6y = 9$ ；この連立方程式を解くと $x = 3$ かつ $y = 2$ ．

終

問4.5.3 実ベクトル空間のベクトル a と b とが平行でないとする．次のような実数 x と y とを求めよ： $(5x+6y)a+(7x+8y)b=2a+4b$ ．

a と b とが，平行でないので，線形独立である． $(5x+6y)a+(7x+8y)b=2a+4b$ となる条件は， $5x+6y=2$ かつ $7x+8y=4$ ；この連立方程式を解くと $x=4$ かつ $y=-3$ ．

終

例 実ベクトル空間のベクトル a と b とが平行でないとする．次のような実数 x を求める：ベクトル $xa + 3b$ と $2a + 7b$ とが平行である． a と b とが，平行でないので，線形独立である．定理 4.5.3 により， $2a + 7b \neq 0$ ． $xa + 3b \parallel 2a + 7b$ であることと同値な条件は，ある実数 k について $xa + 3b = k(2a + 7b)$ つまり $xa + 3b = 2ka + 7kb$ ． a と b とが線形独立なので，定理 4.5.4 より， $x = 2k$ かつ $3 = 7k$ ．これらの方程式より $x = \frac{6}{7}$ ．

終

問4.5.4 実ベクトル空間のベクトル a と b とが平行でないとする．次のような実数 x 求めよ：ベクトル $xa+3b$ と $2a-5b$ とが平行である．

a と b とが，平行でないので，線形独立である． $2a-5b \neq 0$ ．

$xa+3b \parallel 2a-5b$ なので，ある実数 k をとると $xa+3b = k(2a-5b)$ ． a と b とが線形独立なので， $x = 2k$ かつ $3 = -5k$ ．これらの方程式より $x = -\frac{6}{5}$ ．

終

問4.5.5 実ベクトル空間のベクトル a と b とが平行でないとする．次のような実数 x 求めよ：ベクトル $xa+2b$ と $3a+xb$ とが平行である．

a と b とが，平行でないので，線形独立である． $xa+2b \neq 0$ ．
 $xa+2b \parallel 3a+xb$ なので，ある実数 k をとると $3a+xb = k(xa+2b)$ ． a と b とが線形独立なので， $3 = kx$ かつ $x = 2k$ ．これらの方程式より，
 $6 = x^2$ ， $x = \pm\sqrt{6}$ ．

終

2 個のベクトルに関する線形独立の定義は 3 個のベクトルに関する線形独立の定義に拡張できる.

[定義] 実ベクトル空間のベクトル a と b と c とが線形従属であることを次のように定義する: ある実数 p と q と r について, $p \neq 0$ または $q \neq 0$ または $r \neq 0$, かつ, $pa + qb + rc = 0$. ベクトル a と b と c とが線形従属でないとき線形独立であるという.

[定理 4.5.5] 実ベクトル空間のベクトル空間の各ベクトル a と b と c について, a と b と c とが線形独立であることは次の条件と同値である: 各実数 p, q, r について, $pa + qb + rc = 0$ ならば $p = q = r = 0$.

[定理 4.5.6] 実ベクトル空間のベクトル各ベクトル a と b と c について,
 a と b と c とが線形独立であるならば, 各実数 p, q, r について,

$$pa + qb + rc = \mathbf{0} \Leftrightarrow p = 0 \text{ かつ } q = 0 \text{ かつ } r = 0 ,$$

$$p \neq 0 \text{ または } q \neq 0 \text{ または } r \neq 0 \Leftrightarrow pa + qb + rc \neq \mathbf{0} .$$

[定理 4.5.7] 実ベクトル空間のベクトル実ベクトル空間の各ベクトル a
と b と c について, a と b と c とが線形独立であるならば, 各実
数 p, q, r, s, t, u について, $pa + qb + rc = sa + tb + uc$ ならば $p = s$ かつ
 $q = t$ かつ $r = u$.

[定理] 平面ベクトル空間の任意のベクトル a, b, c は線形従属である.

[証明] 実数 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ に対して, $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$, $c = (c_1, c_2)$ とおく. $b = 0$ のとき, $0a + 1b + 0c = 0$ なので, a, b, c は線形従属である. $b \neq 0$ とする. $a_1b_2 = a_2b_1$ のとき, 定理 4.3.5 により $a \parallel b$ なので, ある実数 t をとると, $a = tb$, $1a - tb + 0c = 0$; よって a, b, c は線形従属である. $a_1b_2 \neq a_2b_1$ のとき,

$$\begin{aligned} & -\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}(a_1, a_2) + \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}(b_1, b_2) \\ &= \left(\frac{-a_1(b_1c_2 - b_2c_1) + b_1(a_1c_2 - a_2c_1)}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{-a_2(b_1c_2 - b_2c_1) + b_2(a_1c_2 - a_2c_1)}{a_1b_2 - a_2b_1} \right) \\ &= \left(\frac{c_1(a_1b_2 - a_2b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1}, \frac{c_2(a_1b_2 - a_2b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1} \right) \\ &= (c_1, c_2), \end{aligned}$$

よって $-\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}a + \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}b - 1c = 0$; a, b, c は線形従属である.

[証明終了]