

4.4

ベクトルの平行と垂直

[定理 4.4.1] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b と c について, $a // b$ かつ $b \perp c$ かつ $b \neq 0$ ならば, $a \perp c$.

証明 ベクトル a と b と c について $a // b$ かつ $b \perp c$ かつ $b \neq 0$ とする. $a // b$ かつ $b \neq 0$ より, ある実数 t をとると $a = tb$. $b \perp c$ より $b \cdot c = 0$. これらのことより,

$$a \cdot c = tb \cdot c = t(b \cdot c) = t \cdot 0 = 0 ,$$

よって $a \perp c$.

証明終了

[定理 4.4.2] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b と c について, $a \perp b$ かつ $b \parallel c$ かつ $b \neq 0$ ならば, $a \perp c$.

証明 ベクトル a と b と c について $a \perp b$ かつ $b \parallel c$ かつ $b \neq 0$ とする. $c = 0$ のとき, $a \cdot c = a \cdot 0 = 0$ なので $a \perp c$. $c \neq 0$ のとき, $b \parallel c$ なので, ある実数 t をとると $b = tc$, $b \neq 0$ なので $t \neq 0$, $c = \frac{1}{t}b$, $a \perp b$ より $a \cdot b = 0$ なので,

$$a \cdot c = a \cdot \frac{1}{t}c = \frac{1}{t}(a \cdot b) = \frac{1}{t} \cdot 0 = 0 ,$$

よって $a \perp c$.

証明終了

[定理 4.4.3] ベクトル平面 $\mathbf{R}^2$ の各ベクトル a と b と c について, $a \perp b$ かつ $b \perp c$ かつ $b \neq 0$ ならば, $a \parallel c$.

[証明] 実数 $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ に対して, $a = (a_1, a_2)$ とおき, $b = (b_1, b_2)$ とおき, $c = (c_1, c_2)$ とおく. $a \perp b$ かつ $b \perp c$ かつ $b \neq 0$ とする. $a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$ かつ, $b_1 c_1 + b_2 c_2 = 0$ かつ, $b_1 \neq 0$ または $b_2 \neq 0$. $b_1 \neq 0$ のとき, $a_1 = -\frac{a_2 b_2}{b_1}$ かつ $c_1 = -\frac{c_2 b_2}{b_1}$ なので,

$$(a_1 c_1 + a_2 c_2)^2 = \left(\frac{a_2 b_2}{b_1} \frac{b_2 c_2}{b_1} + a_2 c_2 \right)^2 = a_2^2 c_2^2 \left(\frac{b_2^2}{b_1^2} + 1 \right)^2,$$

$$(a_1^2 + a_2^2)(c_1^2 + c_2^2) = \left(\frac{a_2^2 b_2^2}{b_1^2} + a_2^2 \right) \left(\frac{c_2^2 b_2^2}{b_1^2} + c_2^2 \right) = a_2^2 c_2^2 \left(\frac{b_2^2}{b_1^2} + 1 \right)^2.$$

よって

$$|a \cdot c|^2 = (a_1 c_1 + a_2 c_2)^2 = (a_1^2 + a_2^2)(c_1^2 + c_2^2) = |a|^2 |c|^2.$$

$b_2 \neq 0$ のときも同様に $|a \cdot c|^2 = |a|^2 |c|^2$. 故にどちらのときも $a \parallel c$. 終