

4.3

ベクトルの平行

実ベクトル空間のベクトル a と b について、 a と b とが同じ向きであるとは

$b \neq 0$ ならば 0 以上のある実数 t をとると $a = tb$ であり、 a と b とが逆の向きであるとは

$b \neq 0$ ならば 0 以下のある実数 t をとると $a = tb$ である。

実ベクトル空間のベクトル a と b について、 a と b とが同じ向きであるとは

$b \neq 0$ ならば 0 以上のある実数 t をとると $a = tb$

であり、 a と b とが逆の向きであるとは

$b \neq 0$ ならば 0 以下のある実数 t をとると $a = tb$

である．ここで現れる実数 t が 0 以上のときと 0 以下のときとを併せて、

$b \neq 0$ ならばある実数 t をとると $a = tb$.

であることを、 a と b とが平行であることとする．

実ベクトル空間のベクトル a と b について、 a と b とが同じ向きであるとは

$$b \neq 0 \text{ ならば } 0 \text{ 以上のある実数 } t \text{ をとると } a = tb$$

であり、 a と b とが逆の向きであるとは

$$b \neq 0 \text{ ならば } 0 \text{ 以下のある実数 } t \text{ をとると } a = tb$$

である．ここで現れる実数 t が 0 以上のときと 0 以下のときとを併せて、

$$b \neq 0 \text{ ならばある実数 } t \text{ をとると } a = tb .$$

であることを、 a と b とが平行であることとする．

[定義] 実ベクトル空間のベクトル a と b とが平行であることを次のように定義する：

$$b \neq 0 \text{ ならばある実数 } t \text{ をとると } a = tb .$$

ベクトル a と b とが平行であることを次のように書き表す： $a \parallel b$ ．

実ベクトル空間のベクトル a と b について, $a // b$ の定義は

$b \neq 0$ ならばある実数 t をとると $a = tb$.

この条件では, $b \neq 0$ のときはある実数 t をとると $a = tb$ と制約されるが, $b = 0$ のときは制約されない; よって, $b = 0$ のとき, “ $b \neq 0$ ならばある実数 t をとると $a = tb$ ” なので, $a // b$. つまり $a // 0$.

実ベクトル空間のベクトル a と b について、 $a // b$ の定義は

$$b \neq 0 \text{ ならばある実数 } t \text{ をとると } a = tb .$$

この条件では、 $b \neq 0$ のときはある実数 t をとると $a = tb$ と制約されるが、 $b = 0$ のときは制約されない；よって、 $b = 0$ のとき、“ $b \neq 0$ ならばある実数 t をとると $a = tb$ ” なので、 $a // b$. つまり $a // 0$.

実ベクトル空間のベクトル b と a について、 $b // a$ の定義は

$$a \neq 0 \text{ ならばある実数 } t \text{ をとると } b = ta .$$

ここで $t = 0$ のときを考えると、 $0 = 0a$ なので、 $0 // a$.

実ベクトル空間のベクトル a と b について、 $a // b$ の定義は

$$b \neq 0 \text{ ならばある実数 } t \text{ をとると } a = tb .$$

この条件では、 $b \neq 0$ のときはある実数 t をとると $a = tb$ と制約されるが、 $b = 0$ のときは制約されない；よって、 $b = 0$ のとき、“ $b \neq 0$ ならばある実数 t をとると $a = tb$ ” なので、 $a // b$. つまり $a // 0$.

実ベクトル空間のベクトル b と a について、 $b // a$ の定義は

$$a \neq 0 \text{ ならばある実数 } t \text{ をとると } b = ta .$$

ここで $t = 0$ のときを考えると、 $0 = 0a$ なので、 $0 // a$.

[定理 4.3.1] 実ベクトル空間の各ベクトル a について、 $a // 0$, $0 // a$.

例 変数 x, y について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める：3次元実ベクトル $(x, y, 6)$ と $(5, 2, y)$ とが平行である． $(5, 2, y) \neq \mathbf{0}$ なので， $(x, y, 6) // (5, 2, y)$ であることと同値な条件は，ある実数 t をとると $(x, y, 6) = t(5, 2, y)$ ，つまり，ある実数 t をとると $x = 5t$ かつ $y = 2t$ かつ $6 = yt$ ； $6 = 2t \cdot t$ なので， $t^2 = 3$ ， $t = \pm\sqrt{3}$ ；よって， $x = 5t = \pm 5\sqrt{3}$ かつ $y = 2t = \pm 2\sqrt{3}$ ． $(x, y, 6) // (5, 2, y)$ であることと同値な条件は， $x = \pm 5\sqrt{3}$ かつ $y = \pm 2\sqrt{3}$ （複号同順）．

終

問4.3.1 変数 x, y について次の条件と同値でなるべく簡単な条件を求めよ：3次元実ベクトル $(x, 4, z)$ と $(9, x, 3)$ とが平行である.

$(9, x, 3) \neq \mathbf{0}$ なので, $(x, 4, z) // (9, x, 3)$ であることと同値な条件は, ある実数 t をとると $(x, 4, z) = t(9, x, 3)$, ある実数 t をとると $x = 9t$ かつ $4 = tx$ かつ $z = 3t$, $4 = 9t^2$ なので $t = \pm \frac{2}{3}$. よって, $x = 9t = \pm 6$ かつ $z = 3t = \pm 2$ (複号同順). $(x, 4, z) // (9, x, 3)$ であることと同値な条件は, $x = \pm 6$ かつ $z = \pm 2$ (複号同順).

終

実ベクトル空間のベクトル a と b とが平行であるとの定義は,

$b \neq 0$ ならばある実数 t をとると $a = tb$;

ここで,

$t \geq 0$ のとき a と b とが同じ向きであり,

$t \leq 0$ のとき a と b とが逆の向きである.

実ベクトル空間のベクトル a と b とが平行であるとの定義は,

$$b \neq 0 \text{ ならばある実数 } t \text{ をとると } a = tb \text{ ;}$$

ここで,

$t \geq 0$ のとき a と b とが同じ向きであり,

$t \leq 0$ のとき a と b とが逆の向きである.

$t \geq 0$ または $t \leq 0$ なので, a と b とが平行であるとは, a と b とが同じ向きであるかまたは a と b とが逆の向きであることである.

実ベクトル空間のベクトル a と b とが平行であるとの定義は,

$b \neq 0$ ならばある実数 t をとると $a = tb$;

ここで,

$t \geq 0$ のとき a と b とが同じ向きであり,

$t \leq 0$ のとき a と b とが逆の向きである.

$t \geq 0$ または $t \leq 0$ なので, a と b とが平行であるとは, a と b とが同じ向きであるかまたは a と b とが逆の向きであることである.

[定理 4.3.2] 実ベクトル空間のベクトル a と b とが平行であることは, a と b とが同じ向きであるかまたは a と b とが逆の向きであることと同値である.

実ベクトル空間のベクトル a と b とが平行であるとの定義は,

$$b \neq 0 \text{ ならばある実数 } t \text{ をとると } a = tb \text{ ;}$$

ここで,

$t \geq 0$ のとき a と b とが同じ向きであり,

$t \leq 0$ のとき a と b とが逆の向きである.

$t \geq 0$ または $t \leq 0$ なので, a と b とが平行であるとは, a と b とが同じ向きであるかまたは a と b とが逆の向きであることである.

[定理 4.3.2] 実ベクトル空間のベクトル a と b とが平行であることは, a と b とが同じ向きであるかまたは a と b とが逆の向きであることと同値である.

ベクトル a と b とが平行であることを, a と b とが同じ方向であるともいう. a と b とは, 逆の向きのときも同じ方向である.

定理 4.3.2 により, 実ベクトル空間のベクトル a と b について, a と b とが平行であることは, a と b とが同じ向きであるかまたは a と b とが逆の向きであることと同値である.

定理 4.3.2 により, 実ベクトル空間のベクトル a と b について, a と b とが平行であることは, a と b とが同じ向きであるかまたは a と b とが逆の向きであることと同値である. 定理 4.2.2 により,

$$a \text{ と } b \text{ とが同じ向きである} \iff a \cdot b = |a||b| ,$$

$$a \text{ と } b \text{ とが逆の向きである} \iff a \cdot b = -|a||b| .$$

定理 4.3.2 により, 実ベクトル空間のベクトル a と b について, a と b とが平行であることは, a と b とが同じ向きであるかまたは a と b とが逆の向きであることと同値である. 定理 4.2.2 により,

$$a \text{ と } b \text{ とが同じ向きである} \iff a \cdot b = |a||b| ,$$

$$a \text{ と } b \text{ とが逆の向きである} \iff a \cdot b = -|a||b| .$$

故に, a と b とが平行であることは, $a \cdot b = |a||b|$ または $a \cdot b = -|a||b|$ と同値である.

定理 4.3.2 により, 実ベクトル空間のベクトル a と b について, a と b とが平行であることは, a と b とが同じ向きであるかまたは a と b とが逆の向きであることと同値である. 定理 4.2.2 により,

$$a \text{ と } b \text{ とが同じ向きである} \iff a \cdot b = |a||b| ,$$

$$a \text{ と } b \text{ とが逆の向きである} \iff a \cdot b = -|a||b| .$$

故に, a と b とが平行であることは, $a \cdot b = |a||b|$ または $a \cdot b = -|a||b|$ と同値である.

[定理 4.3.3] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b について,

$$a // b \iff a \cdot b = \pm |a||b| \iff |a \cdot b| = |a||b| .$$

[定理 4.3.4] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b について,

$$a // b \Leftrightarrow b // a .$$

証明 $a \cdot b = b \cdot a$ なので, 定理 4.3.3 により,

$$a // b \Leftrightarrow |a \cdot b| = |a||b| \Leftrightarrow |b \cdot a| = |b||a| \Leftrightarrow b // a .$$

証明終了

[定理 4.3.5] 各実数 a, b, c, d について,

$$(a, b) // (c, d) \Leftrightarrow ad = bc .$$

[証明] $(a, b) // (c, d)$ とする. $(c, d) \neq \mathbf{0}$ ならばある実数 t をとると $(a, b) = t(c, d)$. $(c, d) = \mathbf{0}$ のとき $ad = bc$. $(c, d) \neq \mathbf{0}$ のとき, ある実数 t をとると, $(a, b) = t(c, d)$, $a = tc$ かつ $b = td$, $ad = tcd$ かつ $bc = tcd$, よって $ad = bc$.

$ad = bc$ とする. $(c, d) \neq \mathbf{0}$ とする. $c \neq 0$ または $d \neq 0$, $c \neq 0$ のとき, $b = \frac{ad}{c}$ なので $(a, b) = \left(a, \frac{ad}{c}\right) = \frac{a}{c}(c, d)$. $d \neq 0$ のとき, $a = \frac{bc}{d}$ なので $(a, b) = \left(\frac{bc}{d}, b\right) = \frac{b}{d}(c, d)$. このように, $(c, d) \neq \mathbf{0}$ ならばある実数 t をとると $(a, b) = t(c, d)$. よって $(a, b) // (c, d)$.

証明終了

例 変数 x について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める：ベクトル平面においてベクトル $(x, x+5)$ とベクトル $(3, 7)$ とが平行である．

$$(3, 7) // (x, x+5) \Leftrightarrow 3(x+5) = 7x \Leftrightarrow 4x = 15 \Leftrightarrow x = \frac{15}{4} .$$

つまり $x = \frac{15}{4}$ ．

終

問4.3.2 変数 x について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求めよ：ベクトル平面のベクトル $(x, 2)$ と $(5, x-3)$ とが平行である.

$$(x, 2) // (5, x-3) \Leftrightarrow x(x+3) = 10 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \text{ または } x = -2 .$$

例 変数 x について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める：座標平面の点 $A = (3, 4)$ と $B = (x, 6)$ と $C = (3, x)$ と $D = (x, 7)$ についてベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ とが平行である。

$$\overrightarrow{AB} = (x, 6) - (3, 4) = (x - 3, 2) ,$$

$$\overrightarrow{CD} = (x, 7) - (3, x) = (x - 3, 7 - x) .$$

従って

$$\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow (x - 3, 2) // (x - 3, 7 - x) \Leftrightarrow (x - 3)(7 - x) = 2(x - 3)$$

$$\Leftrightarrow 2(x - 3) - (x - 3)(7 - x) = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ または } x = 5 .$$

ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ とが平行であることと同値な条件は、 $x = 3$ または $x = 5$.

終

問4.3.3 変数 x について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求めよ：座標

平面の点 $A = (4, 6)$ と $B = (x, 9)$ と $C = (8, x)$ と $D = (2x, 7)$ についてベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ とが平行である.

$\overrightarrow{AB} = (x, 9) - (4, 6) = (x - 4, 3)$, $\overrightarrow{CD} = (2x, 7) - (8, x) = (2x - 8, 7 - x)$ なので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} // \overrightarrow{BD} &\Leftrightarrow (x - 4, 3) // (2x - 8, 7 - x) \Leftrightarrow (x - 4)(7 - x) = 3(2x - 8) \\ &\Leftrightarrow (x - 4)(7 - x) - 6(x - 4) = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(1 - x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ または } x = 4 .\end{aligned}$$

ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ とが平行であることと同値な条件は, $x = 1$ または $x = 4$.

終

[定理 4.3.6] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b と c について, $a // b$ かつ $b // c$ かつ $b \neq 0$ ならば, $a // c$.

証明 ベクトル a と b と c について, $a // b$ かつ $b // c$ かつ $b \neq 0$ とする. $c \neq 0$ ならば, $b // c$ より, ある実数 t をとると $b = tc$; $a // b$ かつ $b \neq 0$ なので, ある実数 s をとると $a = sb$; よって $a = stc$. 故に $a // c$.

証明終了

[定理 4.3.7] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b と c と及び各実数 p と q について, $a // c$ かつ $b // c$ ならば, $pa + qb // c$.