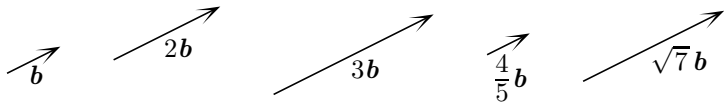


4.2

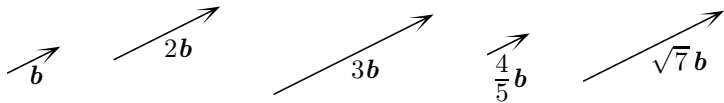
ベクトルの向き

ベクトル b に対してベクトル $2b, 3b, \frac{4}{5}b, \sqrt{7}b$ の各々を表す有向線分は例えば下図のようになる.



このような, ベクトル b に 0 以上の実数 t を掛けたベクトル tb は b と同じ向きであると考え.

ベクトル b に対してベクトル $2b, 3b, \frac{4}{5}b, \sqrt{7}b$ の各々を表す有向線分は例えば下図のようになる.

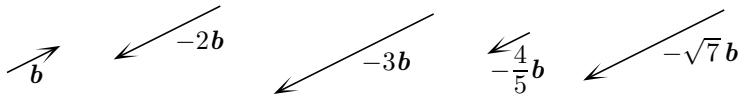


このような, ベクトル b に 0 以上の実数 t を掛けたベクトル tb は b と同じ向きであると考える.

[定義] 実ベクトル空間のベクトル a と b とが同じ向きであることを次のように定義する:

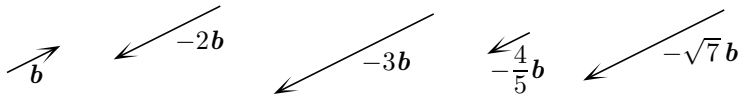
$b \neq 0$ ならば 0 以上のある実数 t をとると $a = tb$.

ベクトル b に対してベクトル $-2b, -3b, -\frac{4}{5}b, -\sqrt{7}b$ の各々を表す有向線分は例えば下図のようになる.



このような, ベクトル b に 0 以下の実数 t を掛けたベクトル tb は b と逆の向きであると考える.

ベクトル b に対してベクトル $-2b, -3b, -\frac{4}{5}b, -\sqrt{7}b$ の各々を表す有向線分は例えば下図のようになる.

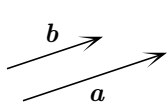


このような, ベクトル b に 0 以下の実数 t を掛けたベクトル tb は b と逆の向きであると考え.

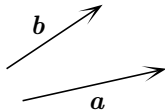
[定義] 実ベクトル空間のベクトル a と b とが逆の向きであることを次のように定義する:

$b \neq 0$ ならば 0 以下のある実数 t をとると $a = tb$.

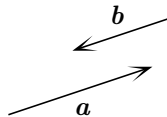
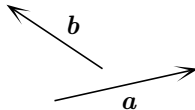
ベクトル a と b について例えば下図のようになる.



同じ向き



同じ向きでも逆の向きでもない



逆の向き

ベクトル a と b とが同じ向きであることの定義は

$b \neq 0$ ならば 0 以上のある実数 t をとると $a = tb$.

ベクトル a と b とが同じ向きであることの定義は

$b \neq 0$ ならば 0 以上のある実数 t をとると $a = tb$.

この条件では、 $b \neq 0$ のときは 0 以上のある実数 t をとると $a = tb$ と制約されるが、 $b = 0$ のときは制約されない；よって、 $b = 0$ のとき、“ $b \neq 0$ ならば 0 以上のある実数 t をとると $a = tb$ ” なので、 a と b とが同じ向きである．つまり a と 0 とが同じ向きである．同様に考えると、 a と 0 とが逆の向きである．

[定理] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b について、 $|a| = |b|$ かつ a と b とが同じ向きならば、 $a = b$.

[証明] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b について、 $|a| = |b|$ かつ a と b とが同じ向きであるとする． $b = 0$ ならば、 $|a| = |b| = 0$ なので $a = 0$, よって $a = b$. $b \neq 0$ ならば、0 以上のある実数 t をとると $a = tb$ なので、 $|a| = |tb| = |t||b|$, $|a| = |b|$ なので $|t||b| = |b|$, $|b| \neq 0$ なので $|t| = 1$, $t \geq 0$ なので $t = 1$, よって $a = tb = b$. 故に、 $|a| = |b|$ かつ a と b とが同じ向きならば、 $a = b$.

証明終了

[定理] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b について、 $|a| = |b|$ かつ a と b とが逆の向きならば、 $a = -b$.

[証明] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b について、 $|a| = |b|$ かつ a と b とが逆の向きであるとする． $b = 0$ ならば、 $|a| = |b| = 0$ なので $a = 0$, よって $a = b$. $b \neq 0$ ならば、0 以下のある実数 t をとると $a = tb$ なので、 $|a| = |tb| = |t||b|$, $|a| = |b|$ なので $|t||b| = |b|$, $|b| \neq 0$ なので $|t| = 1$, $t \leq 0$ なので $t = -1$, よって $a = tb = -b$. 故に、 $|a| = |b|$ かつ a と b とが逆の向きならば、 $a = -b$.

証明終了

[定理 4.2.1] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b について,

$|a| = |b|$ かつ a と b とが同じ向きならば, $a = b$,

$|a| = |b|$ かつ a と b とが逆の向きならば, $a = -b$.

例 ベクトル平面において、ベクトル $(-2, 3)$ と同じ向きで大きさが 5 であるベクトルを求める．ベクトル $(-2, 3)$ と同じ向きで大きさが 5 のベクトルを x とおく． x と $(-2, 3)$ との向きが同じで $(-2, 3) \neq 0$ なので、0 以上のある実数 t をとると $x = t(-2, 3)$ ．これより

$$|x| = |t(-2, 3)| = |t| |(-2, 3)| = |t| \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13} |t| .$$

$|x| = 5$ なので、 $5 = \sqrt{13} |t|$, $|t| = \frac{5}{\sqrt{13}}$. $t \geq 0$ より $|t| = t$ なので、 $t = \frac{5}{\sqrt{13}}$. 従って求めるベクトル x は

$$x = \frac{5}{\sqrt{13}} (-2, 3) = \left(-\frac{10}{\sqrt{13}}, \frac{15}{\sqrt{13}} \right) .$$

終

問4.2.1 ベクトル平面において、ベクトル $(4, -3)$ と同じ向きで大きさが 7 であるベクトルを求めよ.

ベクトル $(4, -3)$ と同じ向きで大きさが 7 のベクトルを x とおく. x と $(4, -3)$ との向きが同じで $(4, -3) \neq \mathbf{0}$ なので, 0 以上のある実数 t をとると $x = t(4, -3)$. これより

$$|x| = |t(4, -3)| = |t|(4, -3)| = |t|\sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25}|t| = 5|t|.$$

$|x| = 7$ なので, $7 = 5|t|$, $|t| = \frac{7}{5}$. $t \geq 0$ より $|t| = t$ なので, $t = \frac{7}{5}$.

従って求めるベクトル x は

$$x = \frac{7}{5}(4, -3) = \left(\frac{28}{5}, -\frac{21}{5}\right).$$

終

例 ベクトル平面において、ベクトル $(5, -3)$ と逆の向きで大きさが 7 であるベクトルを求める．ベクトル $(5, -3)$ と同じ向きで大きさが 7 のベクトルを x とおく． x と $(5, -3)$ との向きが逆で $(5, -3) \neq 0$ なので、0 以下のある実数 t をとると $x = t(5, -3)$. これより

$$|x| = |t(5, -3)| = |t|(5, -3)| = |t|\sqrt{5^2 + (-3)^2} = \sqrt{34}|t| .$$

$|x| = 7$ なので、 $7 = |t|\sqrt{34}$, $|t| = \frac{7}{\sqrt{34}}$. $t \leq 0$ より $|t| = -t$ なので、 $t = -\frac{7}{\sqrt{34}}$. 従って求めるベクトル x は

$$x = -\frac{7}{\sqrt{34}}(5, -3) = \left(-\frac{35}{\sqrt{34}}, \frac{21}{\sqrt{34}}\right) .$$

終

問4.2.2 ベクトル平面において、ベクトル $(-2, 5)$ と逆の向きで大きさが 3 であるベクトルを求めよ.

ベクトル $(-2, 5)$ と同じ向きで大きさが 3 のベクトルを x とおく. x と $(-2, 5)$ との向きが逆で $(-2, 5) \neq 0$ なので, 0 以下のある実数 t をとると $x = t(-2, 5)$. これより

$$|x| = |t(-2, 5)| = |t| |(-2, 5)| = |t| \sqrt{(-2)^2 + 5^2} = \sqrt{29} |t|.$$

$|x| = 3$ なので, $3 = |t| \sqrt{29}$, $|t| = \frac{3}{\sqrt{29}}$. $t \leq 0$ より $|t| = -t$ なので,
 $t = -\frac{3}{\sqrt{29}}$. 従って求めるベクトル x は

$$x = -\frac{3}{\sqrt{29}}(-2, 5) = \left(\frac{6}{\sqrt{29}}, -\frac{15}{\sqrt{29}} \right).$$

終

[定理] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b について、 a と b とが同じ向きであるならば $a \cdot b = |a||b|$.

[証明] a と b とが同じ向きであるとする. $b = 0$ ならば, $a \cdot b = a \cdot 0 = 0$, $|a||b| = |a|0 = 0$, よって $a \cdot b = |a||b|$. $b \neq 0$ ならば, 0 以上のある実数 t をとると $a = tb$ なので,

$$a \cdot b = tb \cdot b = t|b|^2 ,$$

$t \geq 0$ より $|t| = t$ なので,

$$|a||b| = |tb||b| = |t||b||b| = t|b|^2 ,$$

よって $a \cdot b = |a||b|$.

証明終了

[定理] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b について、 a と b とが逆の向きであるならば $a \cdot b = -|a||b|$.

[証明] a と b とが逆の向きであるとする. $b = 0$ ならば, $a \cdot b = a \cdot 0 = 0$, $|a||b| = |a|0 = 0$, よって $a \cdot b = |a||b|$. $b \neq 0$ ならば, 0 以下のある実数 t をとると $a = tb$ なので,

$$a \cdot b = tb \cdot b = t|b|^2 ,$$

$t \leq 0$ より $|t| = -t$ なので,

$$|a||b| = |tb||b| = |t||b||b| = -t|b|^2 ,$$

よって $a \cdot b = -|a||b|$.

証明終了

[定理] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b について, $a \cdot b = |a||b|$ ならば a と b とが同じ向きである.

[証明] $a \cdot b = |a||b|$ とする.

$$\begin{aligned} ||b|a - |a|b|^2 &= (|b|a - |a|b) \cdot (|b|a - |a|b) \\ &= |b|a \cdot |b|a - |b|a \cdot |a|b - |a|b \cdot |b|a + |a|b \cdot |a|b \\ &= |b|^2 a \cdot a - |a||b|a \cdot b - |a||b|a \cdot b + |a|^2 b \cdot b \\ &= |b|^2 |a|^2 - |a||b||a||b| - |a||b||a||b| + |a|^2 |b|^2 \\ &= 0 . \end{aligned}$$

よって, $||b|a - |a|b| = 0$, $|b|a - |a|b = 0$, $|b|a = |a|b$, $b \neq 0$ ならば $a = \frac{|a|}{|b|}b$, ここで $\frac{|a|}{|b|} \geq 0$. 故に a と b とが同じ向きである. 証明終了

[定理] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b について, $a \cdot b = -|a||b|$ ならば a と b とが逆の向きである.

[証明] $a \cdot b = -|a||b|$ とする.

$$\begin{aligned} ||b|a + |a|b|^2 &= (|b|a + |a|b) \cdot (|b|a + |a|b) \\ &= |b|a \cdot |b|a + |b|a \cdot |a|b + |a|b \cdot |b|a + |a|b \cdot |a|b \\ &= |b|^2 a \cdot a + |a||b|a \cdot b + |a||b|a \cdot b + |a|^2 b \cdot b \\ &= |b|^2 |a|^2 - |a||b||a||b| - |a||b||a||b| + |a|^2 |b|^2 \\ &= 0 . \end{aligned}$$

よって, $||b|a + |a|b| = 0$, $|b|a + |a|b = 0$, $|b|a = -|a|b$, $b \neq 0$ ならば $a = -\frac{|a|}{|b|}b$, ここで $-\frac{|b|}{|a|} \leq 0$. 故に a と b とが逆向きである[証明終了]

実ベクトル空間の各ベクトル a と b について,

a と b とが同じ向きであるならば $a \cdot b = |a||b|$,

$a \cdot b = |a||b|$ ならば a と b とが同じ向きである.

よって

a と b とが同じ向きである $\Leftrightarrow a \cdot b = |a||b|$.

また,

a と b とが逆の向きであるならば $a \cdot b = -|a||b|$,

$a \cdot b = -|a||b|$ ならば a と b とが逆の向きである.

よって

a と b とが逆の向きである $\Leftrightarrow a \cdot b = -|a||b|$.

[定理 4.2.2] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b について,

a と b とが同じ向きである $\Leftrightarrow a \cdot b = |a||b|$,

a と b とが逆の向きである $\Leftrightarrow a \cdot b = -|a||b|$.