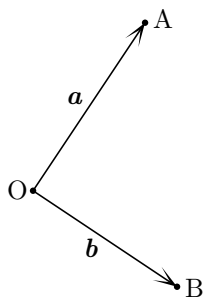


4.1

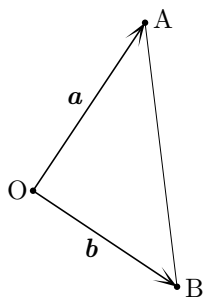
ベクトルの垂直

座標空間において，原点を O とおき，零ベクトルでないベクトル a 及び b に対して a を位置ベクトルとする点を A とおき b を位置ベクトルとする点を B とおく． $A \neq B$ とする．

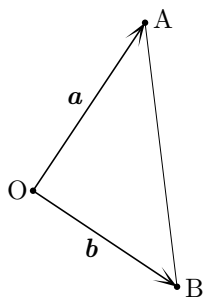


座標空間において，原点を O とおき，零ベクトルでないベクトル a 及び b に対して a を位置ベクトルとする点を A とおき b を位置ベクトルとする点を B とおく． $A \neq B$ とする．三角形 AOB に着目すると

角 AOB が直角である $\Leftrightarrow \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{AB}^2$.



座標空間において，原点を O とおき，零ベクトルでないベクトル a 及び b に対して a を位置ベクトルとする点を A とおき b を位置ベクトルとする点を B とおく． $A \neq B$ とする． 三角形 AOB に着目すると

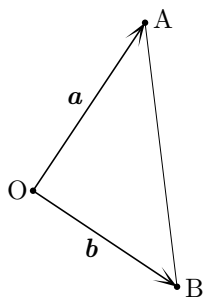


角 AOB が直角である $\Leftrightarrow \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{BA}^2$.

ここで， $\overline{OA}^2 = |a|^2$, $\overline{OB}^2 = |b|^2$,

$$\overline{BA}^2 = |a - b|^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a - 2a \cdot b + b \cdot b = |a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2 \text{ .}$$

座標空間において、原点を O とおき、零ベクトルでないベクトル a 及び b に対して a を位置ベクトルとする点を A とおき b を位置ベクトルとする点を B とおく． $A \neq B$ とする． 三角形 AOB に着目すると



角 AOB が直角である $\Leftrightarrow \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{BA}^2$.

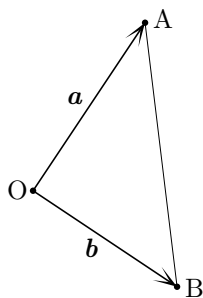
ここで、 $\overline{OA}^2 = |a|^2$, $\overline{OB}^2 = |b|^2$,

$\overline{BA}^2 = |a - b|^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a - 2a \cdot b + b \cdot b = |a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2$.

よって

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{BA}^2 \Leftrightarrow |a|^2 + |b|^2 = |a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2 \Leftrightarrow a \cdot b = 0 .$$

座標空間において、原点を O とおき、零ベクトルでないベクトル a 及び b に対して a を位置ベクトルとする点を A とおき b を位置ベクトルとする点を B とおく． $A \neq B$ とする．三角形 AOB に着目すると



角 AOB が直角である $\Leftrightarrow \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{BA}^2$.

ここで、 $\overline{OA}^2 = |a|^2$, $\overline{OB}^2 = |b|^2$,

$\overline{BA}^2 = |a - b|^2 = (a - b) \cdot (a - b) = a \cdot a - 2a \cdot b + b \cdot b = |a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2$.

よって

$$\overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 = \overline{BA}^2 \Leftrightarrow |a|^2 + |b|^2 = |a|^2 - 2a \cdot b + |b|^2 \Leftrightarrow a \cdot b = 0 .$$

故に

$$\text{角 } AOB \text{ が直角である } \Leftrightarrow a \cdot b = 0 .$$

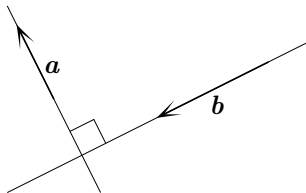
ベクトル a と b とが垂直であることを次のように定義する.

[定義] 実ベクトル空間のベクトル a と b とが垂直であるとは, $a \cdot b = 0$ であることである. 平面ベクトル a と b とが垂直であることを次のように書き表す: $a \perp b$.

ベクトル a と b とが垂直であることを次のように定義する.

[定義] 実ベクトル空間のベクトル a と b とが垂直であるとは, $a \cdot b = 0$ であることである. 平面ベクトル a と b とが垂直であることを次のように書き表す: $a \perp b$.

零ベクトルでないベクトル a と b とが垂直であるとは, a と b とが成す角度が 90° であることなので, 例えば右図のように a を表す有向線分と b を表す有向線分とが垂直であることである.



[定理 4.1.2] 実ベクトル空間の各ベクトル a について $a \perp 0$.

[証明] $a \cdot 0 = 0$ なので $a \perp 0$.

[証明終了]

[定理 4.1.3] 実ベクトル空間の各ベクトル a と b について,

$$a \perp b \Leftrightarrow b \perp a .$$

証明 $a \cdot b = b \cdot a$ なので,

$$a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0 \Leftrightarrow b \cdot a = 0 \Leftrightarrow b \perp a .$$

証明終了

例 変数 x について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める：平面ベクトル $(x, x+2)$ と $(3, 4)$ とが垂直である。

$$(x, x+2) \perp (3, 4) \Leftrightarrow (x, x+2) \cdot (3, 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 4(x+2) = 0 \Leftrightarrow 7x + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{8}{7}.$$

ベクトル $(x, x+2)$ と $(3, 4)$ とが垂直であることと同値な条件は $x = -\frac{8}{7}$ **終**

問4.1.1 変数 x について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求めよ：平面ベクトル $(x, 3)$ と $(x, -2)$ とが垂直である．

$$\begin{aligned}(x, 3) \perp (x, -2) &\Leftrightarrow (x, 3) \cdot (x, -2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6} .\end{aligned}$$

ベクトル $(x, 3)$ と $(x, -2)$ とが垂直であることと同値な条件は $x = \pm\sqrt{6}$ ．

例 変数 x について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める：3次元実ベクトル $(x, 5, 6)$ と $(x, x, 1)$ とが垂直である．

$$(x, 5, 6) \perp (x, x, 1) \Leftrightarrow (x, 5, 6) \cdot (x, x, 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -2 \text{ または } x = -3 .$$

ベクトル $(x, 5, 6)$ と $(x, x, 1)$ とが垂直であることと同値な条件は， $x = -2$ または $x = -3$ ．

終

問4.1.2 変数 x について次の条件と同値でなるべく簡単な条件を求めよ：3次元実ベクトル $(x, -8, 3)$ と $(x, x, 2)$ とが垂直である．

$$\begin{aligned}(x, -8, 3) \perp (x, x, 2) &\Leftrightarrow (x, -8, 3) \cdot (x, x, 2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{10} .\end{aligned}$$

ベクトル $(x, -8, 3)$ と $(x, x, 2)$ とが垂直であることと同値な条件は $x = 4 \pm \sqrt{10}$ ．

例 ベクトル平面において、ベクトル $(2,3)$ に垂直な単位ベクトルを求め
る． $(2,3)$ に垂直な単位ベクトルを (x,y) とおく． $(2,3) \perp (x,y)$ なので、
 $(2,3) \cdot (x,y) = 0$ ， よって

$$2x + 3y = 0 . \quad (1)$$

(x,y) は単位ベクトルなので、

$$x^2 + y^2 = 1 . \quad (2)$$

方程式 (1) より $y = -\frac{2}{3}x$ ，これを方程式 (2) に代入すると、 $x^2 + \frac{4}{9}x^2 = 1$ ，

$\frac{13}{9}x^2 = 1$ ， $x^2 = \frac{9}{13}$ ， $x = \pm \frac{3}{\sqrt{13}}$ ． $y = -\frac{2}{3}x$ なので、 $x = \frac{3}{\sqrt{13}}$ のとき
 $y = -\frac{2}{\sqrt{13}}$ ， $x = -\frac{3}{\sqrt{13}}$ のとき $y = \frac{2}{\sqrt{13}}$ ．従って $(x,y) = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}} \right)$

または $(x,y) = \left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right)$ ．故に、 $(2,3)$ に垂直な単位ベクトルは

$\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, -\frac{2}{\sqrt{13}} \right)$ と $\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right)$ ．

問4.1.3 ベクトル平面において、ベクトル $(-6, 8)$ に垂直な単位ベクトルを求めよ.

$(-6, 8)$ に垂直な単位ベクトルを (x, y) とおく. $(-6, 8) \perp (x, y)$ なので,
 $(-6, 8) \cdot (x, y) = 0$, $-6x + 8y = 0$ なので

$$y = \frac{3}{4}x .$$

(x, y) は単位ベクトルなので,

$$x^2 + y^2 = 1 .$$

この等式に $y = \frac{3}{4}x$ を代入すると $x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 1$, $\frac{25}{16}x^2 = 1$, $x^2 = \frac{16}{25}$,

$x = \pm \frac{4}{5}$. $y = \frac{3}{4}x$ なので, $x = \frac{4}{5}$ のとき $y = \frac{3}{5}$, $x = -\frac{4}{5}$ のとき

$y = -\frac{3}{5}$. 従って $(x, y) = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ または $(x, y) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$. 故に, $(-6, 8)$

に垂直な単位ベクトルは $\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$ と $\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

終

例 3次元実ベクトル平面において、ベクトル $(2,3,-2)$ 及び $(3,4,-4)$ の両方に垂直な零ベクトルでないベクトルの一つを求める．ベクトル $(2,3,-2)$ 及び $(3,4,-4)$ の両方に垂直なベクトルを (x,y,z) とおく．

$$(2,3,-2) \cdot (x,y,z) = 0 \quad \text{なので} \quad 2x + 3y - 2z = 0 \quad \cdots (1) .$$

$$(3,4,-4) \cdot (x,y,z) = 0 \quad \text{なので} \quad 3x + 4y - 4z = 0 \quad \cdots (2) .$$

等式 (1) より $4x + 6y - 4z = 0$, これから等式 (2) を辺々引くと, $x + 2y = 0$, $x = -2y$. 等式 (1) より $2z = 2x + 3y = -4y + 3y = -y$, $z = -\frac{1}{2}y$. $y = -2$ とする. $x = 4$ かつ $z = 1$ ベクトル $(2,3,-2)$ 及び $(3,4,-4)$ の両方に垂直な零ベクトルでないベクトルの一つは $(4,-2,1)$ である. **終**

問4.1.3 3次元実ベクトル空間において、ベクトル $(3, -2, 2)$ 及び $(4, -3, 5)$ の両方に垂直な零ベクトルでないベクトルの一つを求めよ.

ベクトル $(3, -2, 2)$ 及び $(4, -3, 5)$ の両方に垂直な零ベクトルでないベクトルの一つは $(4, 7, 1)$ である. 終

[定理] 座標空間の点 A, B, C について, $A \neq B$ かつ $A \neq C$ のとき,

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \text{角 } BAC \text{ が直角である.}$$

[証明] 三角形 BAC に着目すると,

$$\text{角 } BAC \text{ が直角である} \Leftrightarrow \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{CB}^2.$$

ここで

$$\begin{aligned}\overline{CB}^2 &= |\overrightarrow{CB}|^2 = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|^2 = (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \overline{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overline{AC}^2.\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{CB}^2 &\Leftrightarrow \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overline{AC}^2 \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.\end{aligned}$$

証明終了

[定理] 座標空間の点 A, B, C について, $A \neq B$ かつ $A \neq C$ のとき,

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \text{角 } BAC \text{ が直角である.}$$

この定理は次のように拡張できる.

[定理 4.1.4] 座標空間の点 A, B, C, D について, $A \neq B$ かつ $C \neq D$ で, 直線 AB と直線 CD とが 1 点で交わる時,

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \text{直線 } AB \text{ と直線 } CD \text{ とが垂直である.}$$

例 次のような実数 x を求める：座標平面の点 $A = (2,1)$ と $B = (7,4)$ と $P = (x,0)$ について角 APB は直角である．定理 4.1.4 より，角 APB が直角であることは，ベクトル $\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PB}$ とが垂直であることと同値である．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} &= (2,1) - (x,0) = (2-x,1) , \\ \overrightarrow{PB} &= (7,4) - (x,0) = (7-x,4) .\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB} &\Leftrightarrow (2-x,1) \perp (7-x,4) \Leftrightarrow (2-x,1) \cdot (7-x,4) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2-x)(7-x) + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-3)(x-6) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 3 \text{ または } x = 6 .\end{aligned}$$

故に 3 と 6 とである．

終

問4.1.4 次のような実数 y を求めよ：座標平面の点 $A = (2, 9)$ と $B = (3, 2)$ と $P = (0, y)$ について角 APB は直角である。

角 APB が直角であることは、ベクトル $\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PB}$ とが垂直であることと同値である。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} &= (2, 9) - (0, y) = (2, 9 - y) , \\ \overrightarrow{PB} &= (3, 2) - (0, y) = (3, 2 - y) .\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB} &\Leftrightarrow (2, 9 - y) \perp (3, 2 - y) \Leftrightarrow (2, 9 - y) \cdot (3, 2 - y) = 0 \\ &\Leftrightarrow 6 + (9 - y)(2 - y) = 0 \Leftrightarrow y^2 - 11y + 24 = 0 \\ &\Leftrightarrow (y - 3)(y - 8) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 3 \text{ または } y = 8 .\end{aligned}$$

故に 3 と 8 とである。

終

例 変数 x について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める：座標平面の点 $A = (2, 3)$ と $B = (x, 7)$ と $C = (5, x)$ と $D = (x, 2)$ とに対して、ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ とが垂直である。

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (x, 7) - (2, 3) = (x - 2, 4) , \\ \overrightarrow{CD} &= (x, 2) - (5, x) = (x - 5, 2 - x) .\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD} &\Leftrightarrow (x - 2, 4) \perp (x - 5, 2 - x) \\ &\Leftrightarrow (x - 2, 4) \cdot (x - 5, 2 - x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 2)(x - 5) + 4(2 - x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 2)(x - 9) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 2 \text{ または } x = 9 .\end{aligned}$$

ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ とが垂直であることと同値な条件は、 $x = 2$ または $x = 9$.

問4.1.5 変数 x について次の条件と同値となるべく簡単な条件を求める：座標平面の点 $A = (5, 3)$ と $B = (9, x)$ と $C = (2x, 1)$ と $D = (6, x)$ について、ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ とが垂直である。

$$\overrightarrow{AB} = (9, x) - (5, 3) = (4, x - 3) ,$$

$$\overrightarrow{CD} = (6, x) - (2x, 1) = (6 - 2x, x - 1) .$$

よって,

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow (4, x - 3) \perp (6 - 2x, x - 1)$$

$$\Leftrightarrow 4(6 - 2x) + (x - 3)(x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 12x + 27 = 0 \Leftrightarrow (x - 3)(x - 9) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \text{ または } x = 9 .$$

ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ とが垂直であることと同値な条件は、 $x = 3$ または $x = 9$.

例 次のことを示す：実ベクトル空間の各ベクトル a と b に対して，ベクトル a と $(a \cdot b)a - |a|^2 b$ とが垂直である．

$$\begin{aligned} a \cdot \{(a \cdot b)a - |a|^2 b\} &= a \cdot \{(a \cdot b)a\} - a \cdot |a|^2 b = (a \cdot b)(a \cdot a) - |a|^2(a \cdot b) \\ &= (a \cdot b)|a|^2 - |a|^2(a \cdot b) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

故に a と $(a \cdot b)a - |a|^2 b$ とが垂直である．

終

問4.1.6 次のことを示せ：実ベクトル空間の各ベクトル a と b に対して、ベクトル $|b|a + |a|b$ と $|b|a - |a|b$ とが垂直である。

$$\begin{aligned} (|b|a + |a|b) \cdot (|b|a - |a|b) &= |b|a \cdot |b|a - |b|a \cdot |a|b + |a|b \cdot |b|a - |a|b \cdot |a|b \\ &= |a|^2|b|^2 - |a||b|(a \cdot b) + |a||b|(a \cdot b) - |a|^2|b|^2 \\ &= 0 . \end{aligned}$$

故に $|b|a + |a|b$ と $|b|a - |a|b$ とが垂直である。

終