

3.8

3次元実ベクトルの大きさ

各実数 a に対して, a の絶対値 $|a|$ は

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

であった. このことと同様に, 3次元実ベクトル a の大きさ $|a|$ を定義する. 3次元実ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ の各ベクトル a について, 定理 3.7.2 により $a \cdot a \geq 0$ なので, 実数 $\sqrt{a \cdot a}$ がある.

各実数 a に対して, a の絶対値 $|a|$ は

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

であった. このことと同様に, 3次元実ベクトル a の大きさ $|a|$ を定義する. 3次元実ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ の各ベクトル a について, 定理 3.7.2 により $a \cdot a \geq 0$ なので, 実数 $\sqrt{a \cdot a}$ がある.

[定義] 各 3次元実ベクトル a に対して, 実数 $\sqrt{a \cdot a}$ を a の大きさといい, $|a|$ と書き表す:

$$|a| = \sqrt{a \cdot a} .$$

[定理 3.8.1] 各 3 次元実ベクトル a について,

$$|a|^2 = a \cdot a .$$

[証明] 定理 3.7.2 により $a \cdot a \geq 0$ なので $|a|^2 = \sqrt{a \cdot a}^2 = a \cdot a$.

[証明終了]

[定理 3.8.2] 3次元実ベクトル a について,

$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = \mathbf{0} .$$

証明 定理 3.7.3 を用いる.

$$|a| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a \cdot a} = 0 \Leftrightarrow a \cdot a = 0 \Leftrightarrow a = \mathbf{0} .$$

証明終了

[定理 3.8.3] 各 3 次元実ベクトル $\boldsymbol{a}$ 及び各実数 k について,

$$|k\boldsymbol{a}| = |k||\boldsymbol{a}| \ .$$

証明

$$|k\boldsymbol{a}| = \sqrt{(k\boldsymbol{a}) \cdot (k\boldsymbol{a})} = \sqrt{k^2 \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{k^2} \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = |k| |\boldsymbol{a}| \ .$$

証明終了

[定理 3.8.3] 各 3 次元実ベクトル $\boldsymbol{a}$ 及び各実数 k について,

$$|k\boldsymbol{a}| = |k||\boldsymbol{a}| .$$

証明

$$|k\boldsymbol{a}| = \sqrt{(k\boldsymbol{a}) \cdot (k\boldsymbol{a})} = \sqrt{k^2 \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{k^2} \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = |k| |\boldsymbol{a}| .$$

証明終了

つまり, 各 3 次元実ベクトル $\boldsymbol{a}$ 及び各実数 k について, ベクトル $k\boldsymbol{a}$ の大きさはベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさの $|k|$ 倍である.

[定理 3.8.4] 各実数 a_1, a_2, a_3 について, 3 次元実ベクトル (a_1, a_2, a_3) の大きさ $|(a_1, a_2, a_3)|$ は

$$|(a_1, a_2, a_3)| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} .$$

証明

$$\begin{aligned} |(a_1, a_2, a_3)| &= \sqrt{(a_1, a_2, a_3) \cdot (a_1, a_2, a_3)} = \sqrt{a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3} \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} . \end{aligned}$$

証明終了

[定理 3.8.4] 各実数 a_1, a_2, a_3 について, 3 次元実ベクトル (a_1, a_2, a_3) の大きさ $|(a_1, a_2, a_3)|$ は

$$|(a_1, a_2, a_3)| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} .$$

証明

$$\begin{aligned} |(a_1, a_2, a_3)| &= \sqrt{(a_1, a_2, a_3) \cdot (a_1, a_2, a_3)} = \sqrt{a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3} \\ &= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} . \end{aligned}$$

証明終了

[例] 3 次元実ベクトル $(-4, -5, 6)$ の大きさは

$$|(-4, -5, 6)| = \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2 + 6^2} = \sqrt{16 + 25 + 36} = \sqrt{77} .$$

終

問3.8.1 以下の 3 次元実ベクトルの大きさを求めよ.

(1) $(-5, 6, -3)$.

(2) $(6 + \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5}, 4 + \sqrt{5})$.

(1)

$$|(-5, 6, 3)| = \sqrt{25 + 36 + 9} = \sqrt{70} .$$

(2)

$$\begin{aligned} |(6 + \sqrt{5}, 2 - \sqrt{5}, -4 + \sqrt{5})| &= \sqrt{36 + 12\sqrt{5} + 5 + 4 - 4\sqrt{5} + 5 + 16 - 8\sqrt{5} + 5} \\ &= \sqrt{71} . \end{aligned}$$

[定理 3.2] 3次元座標空間において, 実数 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ に対して点 $P = (x_1, y_1, z_1)$ と点 $Q = (x_2, y_2, z_2)$ との間の距離は

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \ .$$

[定理 3.8.5] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の各点 A, B について,

$$|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB} .$$

[証明] 実数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ に対して $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ とおく. 更に, 点 A の位置ベクトルを $\mathbf{a}$ と, 点 B の位置ベクトルを $\mathbf{b}$ とおく: $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a} = (b_1, b_2, b_3) - (a_1, a_2, a_3) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) .$$

よって定理 3.8.4 より

$$|\overrightarrow{AB}| = |(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2} .$$

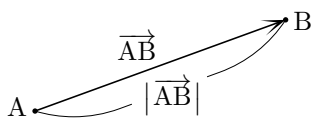
また, $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ より,

$$\overline{AB} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2} .$$

故に $|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$.

証明終了

つまり, 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の各点 A, B について, 例えば右図のように, ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の大きさ $|\overrightarrow{AB}|$ は線分 AB の長さである.



例 3次元実ベクトル a と b について, $|a| = 3$ かつ $|b| = 2$ かつ $a \cdot b = -4$ とする. ベクトル $5a + 8b$ と $6a - 7b$ との内積を計算する.

$$\begin{aligned}(5a + 8b) \cdot (6a - 7b) &= 5a \cdot (6a - 7b) + 8b \cdot (6a - 7b) \\&= 5a \cdot 6a - 5a \cdot 7b + 8b \cdot 6a - 8b \cdot 7b \\&= 30a \cdot a - 35a \cdot b + 48a \cdot b - 56b \cdot b \\&= 30|a|^2 + 13a \cdot b - 56|b|^2 \\&= 30 \cdot 9 + 13 \cdot (-4) - 56 \cdot 4 = 270 - 52 - 224 \\&= -6 .\end{aligned}$$

よって $(5a + 8b) \cdot (6a - 7b) = -6$.

終

問3.8.1 平面ベクトル a と b について, $|a|=2$ かつ $|b|=3$ かつ $a \cdot b = 4$ とする. ベクトル $6a - 5b$ と $7a + 8b$ との内積を計算せよ.

$$\begin{aligned}(6a - 5b) \cdot (7a + 8b) &= 6a \cdot (7a + 8b) - 5b \cdot (7a + 8b) \\&= 6a \cdot 7a + 6a \cdot 8b - (5b \cdot 7a + 5b \cdot 8b) \\&= 42a \cdot a + 48a \cdot b - 35a \cdot b - 40b \cdot b \\&= 42|a|^2 + 13a \cdot b - 40|b|^2 = 42 \cdot 4 + 13 \cdot 4 - 40 \cdot 9 = 168 + 52 \\&= -140 .\end{aligned}$$

よって $(6a - 5b) \cdot (7a + 8b) = -140$.

例 平面ベクトル a と b について, $|a| = 4$ かつ $|b| = 5$ かつ $a \cdot b = 18$ とする. ベクトル $3a - 2b$ の大きさ $|3a - 2b|$ を求める.

$$\begin{aligned}|3a - 2b|^2 &= (3a - 2b) \cdot (3a - 2b) = 9a \cdot a - 6a \cdot b - 6b \cdot a + 4b \cdot b \\&= 9|a|^2 - 12a \cdot b + 4|b|^2 = 9 \cdot 16 - 12 \cdot 18 + 4 \cdot 25 \\&= 28 .\end{aligned}$$

よって $|3a - 2b| = \sqrt{28}$.

終

問3.8.1 3次元実ベクトル a と b について, $|a|=5$ かつ $|b|=6$ かつ $a \cdot b = -28$ とする. ベクトル $2a+3b$ の大きさ $|2a+3b|$ を求めよ.

$$\begin{aligned}|2a+3b|^2 &= (2a+3b) \cdot (2a+3b) = 4a \cdot a + 6a \cdot b + 6b \cdot a + 9b \cdot b \\&= 4|a|^2 + 12a \cdot b + 9|b|^2 = 4 \cdot 25 + 12 \cdot (-28) + 9 \cdot 36 \\&= 88 .\end{aligned}$$

よって $|2a+3b| = \sqrt{88}$.

終

[定義] 3次元実ベクトル a が単位ベクトルであるとは $|a|=1$ となることである.

[例] 次のような実数 x を求める: 3次元実ベクトル $\left(x, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}\right)$ が単位ベクトルである.

$$\left| \left(x, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}\right) \right| = 1 \quad \text{なので,} \quad \sqrt{x^2 + \left(\frac{4}{7}\right)^2 + \left(\frac{5}{7}\right)^2} = 1, \quad x^2 + \frac{16}{49} + \frac{25}{49} = 1,$$
$$x^2 = \frac{8}{49}, \quad x = \pm \sqrt{\frac{8}{49}} = \pm \frac{\sqrt{8}}{7}. \quad \boxed{\text{終}}$$

問3.8.2 次のような実数 y を求めよ：3次元実ベクトル $\left(\frac{3}{8}, y, \frac{5}{8}\right)$ が単位ベクトルである．

$$\left|\left(\frac{3}{8}, y, \frac{5}{8}\right)\right| = 1 \quad \text{なので,} \quad \sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2 + y^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2} = 1, \quad \frac{9}{64} + y^2 + \frac{25}{64} = 1,$$
$$y^2 = \frac{15}{32}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{15}{32}} = \pm\frac{\sqrt{30}}{8}.$$

例えば, $x^2 \leq 3^2$ である実数 x の範囲は $-3 \leq x \leq 3$ である. 一般的に次の定理が成り立つ.

[定理] 実数 a, b について, $b \geq 0$ かつ $a^2 \leq b^2$ ならば, $-b \leq a \leq b$.

[定理 3.8.6] 各 3 次元実ベクトル a と b について,

$$-|a||b| \leq a \cdot b \leq |a||b| .$$

[証明] $a = 0$ または $b = 0$ のとき, 定理 3.7.1 により $a \cdot b = 0$, 定理 3.8.2 により $|a| = 0$ または $|b| = 0$ なので $|a||b| = 0$, よって $-|a||b| \leq a \cdot b \leq |a||b|$. $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ とする. 定理 3.8.2 により, $|a| \neq 0$ なので $|a| > 0$, $|b| \neq 0$ なので $|b| > 0$. 定理 3.8.1 により,

$$\begin{aligned} ||b|a - |a|b|^2 &= (|b|a - |a|b) \cdot (|b|a - |a|b) \\ &= |b|^2(a \cdot a) - 2|a||b|(a \cdot b) + |a|^2(b \cdot b) \\ &= |b|^2|a|^2 - 2|a||b|(a \cdot b) + |a|^2|b|^2 \\ &= 2|a||b|(|a||b| - a \cdot b) \end{aligned}$$

$||b|a - |a|b|^2 \geq 0$ なので, $2|a||b|(|a||b| - a \cdot b) \geq 0$, $|a| > 0$ かつ $|b| > 0$ なので $|a||b| - a \cdot b \geq 0$, $a \cdot b \leq |a||b|$. この不等式で a を $-a$ に置き換えると, $(-a) \cdot b \leq |-a||b|$, $-a \cdot b \leq |a||b|$, $-|a||b| \leq a \cdot b$. [証明終了]