

3.7

3次元実ベクトルの内積

[定義] 各実数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ について, 3次元実ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ との内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を次のように定義する:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \ .$$

[定義] 各実数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ について, 3次元実ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ との内積 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ を次のように定義する:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \ .$$

ベクトルの内積はスカラー (実数) でありベクトルではない. ベクトル $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との内積 (を表す式) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ において $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との間の点 “ $\cdot$ ” は省略してはならない.

例 3次元実ベクトル $(2, -3, 4)$ と $(-7, 6, 5)$ との内積を計算する.

$$(2, -3, 4) \cdot (-7, 6, 5) = 2 \cdot (-7) - 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5 = -14 - 18 + 20 = -12 .$$

3次元実ベクトル $\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{9}{2}\right)$ と $(1, 8, -5)$ との内積を計算する.

$$\left(\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{9}{2}\right) \cdot (1, 8, -5) = \frac{7}{6} \cdot 1 + \frac{4}{3} \cdot 8 + \frac{9}{2} \cdot (-5) = \frac{7}{6} + \frac{32}{3} - \frac{45}{2} = -\frac{32}{3} .$$

3次元実ベクトル $(8, 4\sqrt{5}, 7)$ と $(2\sqrt{5}, 6, 3\sqrt{5})$ との内積を計算する.

$$\begin{aligned}(8, 4\sqrt{5}, 7) \cdot (2\sqrt{5}, -6, 3\sqrt{5}) &= 8 \cdot 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} \cdot (-6) + 7 \cdot 3\sqrt{5} \\ &= 16\sqrt{5} - 24\sqrt{5} + 21\sqrt{5} \\ &= 13\sqrt{5} .\end{aligned}$$

終

問3.7.1 3次元実ベクトルの以下の内積を計算せよ.

(1) 3次元実ベクトル $(-1, 4, 5)$ と $\left(\frac{9}{2}, \frac{8}{3}, -\frac{7}{6}\right)$ との内積.

(2) 3次元実ベクトル $(3\sqrt{7}, -8, -4\sqrt{7})$ と $(5, -2\sqrt{7}, 6)$ との内積.

(1)

$$\begin{aligned}(-1, 4, 5) \cdot \left(\frac{9}{2}, \frac{8}{3}, -\frac{7}{6}\right) &= -1 \cdot \frac{9}{2} + 4 \cdot \frac{8}{3} + 5 \cdot \left(-\frac{7}{6}\right) = -\frac{9}{2} + \frac{32}{3} - \frac{35}{6} \\&= -\frac{27}{6} + \frac{64}{6} - \frac{35}{6} = \frac{2}{6} \\&= \frac{1}{3} .\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}(3\sqrt{7}, -8, -4\sqrt{7}) \cdot (5, -2\sqrt{7}, 6) &= 3\sqrt{7} \cdot 5 + (-8) \cdot (-2\sqrt{7}) + (-4\sqrt{7}) \cdot 6 \\&= 15\sqrt{7} + 16\sqrt{7} - 24\sqrt{7} \\&= 7\sqrt{7}\end{aligned}$$

問3.7.1 次のような実数 x を求めよ：3次元実ベクトル $(x, 2)$ と $(3, 5)$ との内積は 0 である．

$$(x, 2) \cdot (3, 5) = 0 \quad , \quad 3x + 10 = 0 \quad , \quad x = -\frac{10}{3} \quad .$$

[定理 3.7.1] 各 3 次元実ベクトル a, b, c および各スカラー p について, 以下のことが成り立つ:

(内積の交換法則)
$$a \cdot b = b \cdot a ;$$

(内積の結合法則)
$$(pa) \cdot b = p(a \cdot b) , \quad a \cdot (pb) = p(a \cdot b) ;$$

(内積の分配法則)
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c , \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c ;$$

$$0 \cdot a = 0 , \quad a \cdot 0 = 0 .$$

証明 実数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3$ に対して $a = (a_1, a_2, a_3)$,
 $b = (b_1, b_2, b_3)$, $c = (c_1, c_2, c_3)$ とおく.

$$a \cdot b = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 ,$$

$$b \cdot a = (b_1, b_2, b_3) \cdot (a_1, a_2, a_3) = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 ,$$

よって $a \cdot b = b \cdot a$.

$$\begin{aligned}
 (p\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} &= \{p(a_1, a_2, a_3)\} \cdot (b_1, b_2, b_3) = (pa_1, pa_2, pa_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) \\
 &= pa_1b_1 + pa_2b_2 + pa_3b_3 \quad ,
 \end{aligned}$$

$$p(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = p\{(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)\} = p(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) = pa_1b_1 + pa_2b_2 + pa_3b_3 \quad ,$$

よつて $(p\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = p(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$. 同様に $\mathbf{a} \cdot (p\mathbf{b}) = p(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= (a_1, a_2, a_3) \cdot \{(b_1, b_2, b_3) + (c_1, c_2, c_3)\} \\
 &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3) \\
 &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3) \\
 &= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3 \quad ,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} &= (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) + (a_1, a_2, a_3) \cdot (c_1, c_2, c_3) \\
 &= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 \\
 &= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3 \quad ,
 \end{aligned}$$

よつて $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$. 同様に $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = (0, 0, 0) \cdot (a_1, a_2, a_3) = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 = 0 \ .$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (0, 0, 0) = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 0 = 0 \ .$$

証明終了

例 3次元実ベクトル a と b について, $a \cdot a = 7$ かつ $b \cdot b = 8$ かつ $a \cdot b = -2$ とする. ベクトル $4a - 3b$ と $5a + 6b$ との内積を計算する.

$$\begin{aligned}(4a - 3b) \cdot (5a + 6b) &= 4a \cdot (5a + 6b) - 3b \cdot (5a + 6b) \\&= 4a \cdot 5a + 4a \cdot 6b - (3b \cdot 5a + 3b \cdot 6b) \\&= 20a \cdot a + 24a \cdot b - 15a \cdot b - 18b \cdot b \\&= 20a \cdot a + 9a \cdot b - 18b \cdot b ,\end{aligned}$$

$a \cdot a = 7$ かつ $b \cdot b = 8$ かつ $a \cdot b = -2$ なので,

$$20a \cdot a + 9a \cdot b - 18b \cdot b = 20 \cdot 7 + 9 \cdot (-2) - 18 \cdot 8 = 140 - 18 - 144 = -22 .$$

よって $(4a - 3b) \cdot (5a + 6b) = -22$.

終

問3.7.2 3次元実ベクトル a と b について, $a \cdot a = 7$ かつ $b \cdot b = 8$ かつ $a \cdot b = 9$ とする. ベクトル $3a + 4b$ と $6a - 5b$ との内積を計算せよ.

$$\begin{aligned}(3a + 4b) \cdot (6a - 5b) &= 18a \cdot a - 15a \cdot b + 24a \cdot b - 20b \cdot b \\&= 18a \cdot a + 9a \cdot b - 20b \cdot b = 18 \cdot 7 + 9 \cdot 9 - 20 \cdot 8 \\&= 86 + 81 - 160 = 6 \ .\end{aligned}$$

[定理] 各実数 a について $a^2 \geq 0$.

これと似たことが 3 次元実ベクトルについても成り立つ.

[定理] 各実数 a について $a^2 \geq 0$.

これと似たことが 3 次元実ベクトルについても成り立つ.

[定理 3.7.2] 各 3 次元実ベクトル a について $a \cdot a \geq 0$.

[証明] 実数 a_1, a_2, a_3 に対して $a = (a_1, a_2, a_3)$ とおく.

$$a \cdot a = (a_1, a_2, a_3) \cdot (a_1, a_2, a_3) = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 .$$

a_1, a_2, a_3 は実数なので $a_1^2 \geq 0$ かつ $a_2^2 \geq 0$ かつ $a_3^2 \geq 0$, よって

$$a \cdot a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \geq 0 .$$

証明終了

[定理] 各実数 a について,

$$a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 .$$

これと似たことが 3 次元実ベクトルの内積についても成り立つ.

[定理] 各実数 a について,

$$a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 .$$

これと似たことが 3 次元実ベクトルの内積についても成り立つ.

[定理 3.7.3] 各 3 次元実ベクトル $\mathbf{a}$ について,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0} .$$

[証明] 実数 a_1, a_2, a_3 に対して $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ とおく.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (a_1, a_2, a_3) = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 .$$

a_1, a_2, a_3 は実数なので $a_1^2 \geq 0$, $a_2^2 \geq 0$, $a_3^2 \geq 0$. 従って

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0 \Leftrightarrow a_1^2 = 0 \text{ かつ } a_2^2 = 0 \text{ かつ } a_3^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 = 0 \text{ かつ } a_2 = 0 \text{ かつ } a_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{a} = \mathbf{0} .$$

証明終了