

3.6

3次元座標空間における平行移動とベクトル

3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ において, 例えば3次元ベクトル $(2,3,4)$ による平行移動とは, 各点 (x,y,z) を点 $(x+2,y+3,z+4)$ に移す変換である.

[定義] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ において, 実数 p,q,r に対するベクトル (p,q,r) による平行移動とは, 各点 (x,y,z) を点 $(x+p,y+q,z+r)$ に移す変換である.

[定義] 3次元座標空間 $\mathbb{R}^3$ において, 実数 p, q, r に対するベクトル (p, q, r) による平行移動とは, 各点 (x, y, z) を点 $(x+p, y+q, z+r)$ に移す変換である.

[定理 3.6.1] 3次元座標空間 $\mathbb{R}^3$ において, 原点を O とおくとき, 点 A と B 及び3次元ベクトル s について, s による平行移動で A が B に移ることは $\overrightarrow{OA} + s = \overrightarrow{OB}$ と同値である.

[証明] 点 A, B の各々の位置ベクトルを $(a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3)$ とおく.
 $s = (s_1, s_2, s_3)$ とおく.

s による平行移動で A が B に移る

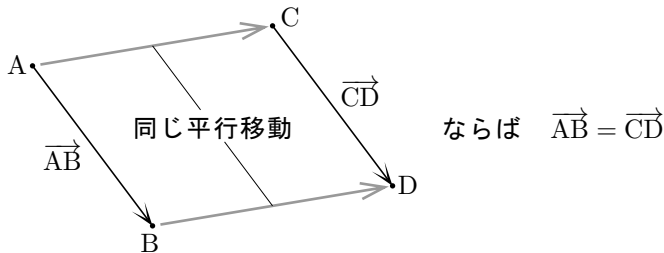
$$\Leftrightarrow (a_1 + s_1, a_2 + s_2, a_3 + s_3) = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3) + (s_1, s_2, s_3) = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + s = \overrightarrow{OB} .$$

証明終了

[定理 3.6.2] 3 次元座標空間 $\mathbb{R}^3$ において、ある平行移動で、点 A が点 C に移り、点 B が点 D に移るならば、 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



ある平行移動によって始点どうし終点どうし重ねることができる有向線分は同じベクトルを表す.

[定理 3.6.2] 3 次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ において, ある平行移動で, 点 A が点 C に移り, 点 B が点 D に移るならば, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

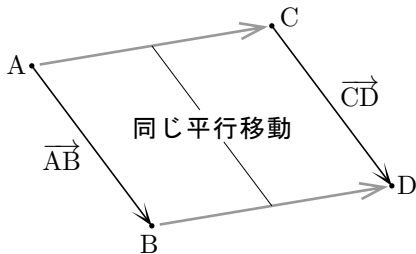
[証明] 座標平面の原点を O とおく. ある 3 次元ベクトル s による平行移動で, 点 A が点 C に移り, 点 B が点 D に移ると仮定する. 定理 3.6.1 により, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + s$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + s$. 故に

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + s - (\overrightarrow{OA} + s) = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB} .$$

証明終了

[定理 3.6.3] 3次元座標空間 $\mathbb{R}^3$ の点 A, B, C, D について, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ならば, ある平行移動で, 点 A が点 C に移り, 点 B が点 D に移る.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ならば



[定理 3.6.3] 3次元座標空間 $\mathbb{R}^3$ の点 A, B, C, D について, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ならば, ある平行移動で, 点 A が点 C に移り, 点 B が点 D に移る.

[証明] 座標平面の原点を O とおく. 3次元ベクトル s を $s = \overrightarrow{AC}$ とおく.

$$\overrightarrow{OA} + s = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC},$$

定理 3.6.1 により s による平行移動で A は C に移る. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ならば,

$$\overrightarrow{OB} + s = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD},$$

定理 3.6.1 により s による平行移動で B は D に移る.

[証明終了]

[定理 3.6.2] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ において, ある平行移動で, 点 A が点 C に移り, 点 B が点 D に移るならば, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

[定理 3.5.4] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の各点 A, B, C について,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \text{ , } \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \text{ .}$$

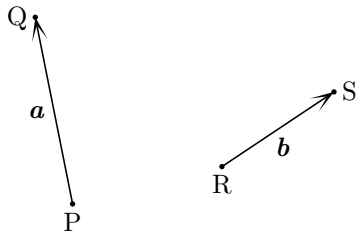
[定理 3.6.2] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ において, ある平行移動で, 点 A が点 C に移り, 点 B が点 D に移るならば, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

[定理 3.5.4] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の各点 A, B, C について,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} , \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} .$$

3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 P, Q, R, S に対して, ベクトル $a = \overrightarrow{PQ}$ と $b = \overrightarrow{RS}$ を考える.

$$a + b =$$



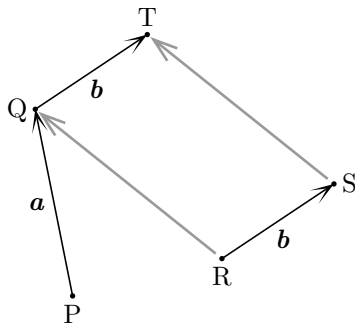
[定理 3.6.2] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ において, ある平行移動で, 点 A が点 C に移り, 点 B が点 D に移るならば, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

[定理 3.5.4] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の各点 A, B, C について,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$

3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 P, Q, R, S に対して, ベクトル $a = \overrightarrow{PQ}$ と $b = \overrightarrow{RS}$ を考える. 右図のように, 点 R が点 Q に移る平行移動によって, 点 S が点 T に移るとする.

$$a + b =$$



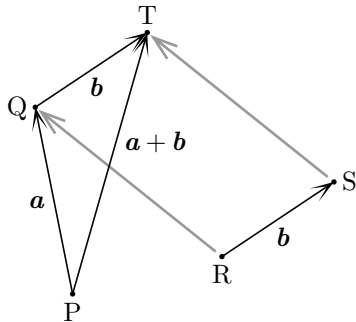
[定理 3.6.2] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ において、ある平行移動で、点 A が点 C に移り、点 B が点 D に移るならば、 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

[定理 3.5.4] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の各点 A, B, C について、

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} , \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} .$$

3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 P, Q, R, S に対して、ベクトル $a = \overrightarrow{PQ}$ と $b = \overrightarrow{RS}$ を考える. 右図のように、点 R が点 Q に移る平行移動によって、点 S が点 T に移るとする. このとき、定理 3.6.2 により $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{QT}$ なので、定理 3.5.4 により

$$a + b = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QT} = \overrightarrow{PT} .$$

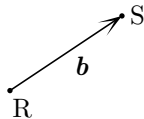
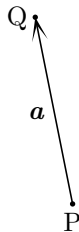


[定理 3.6.2] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ において, ある平行移動で, 点 A が点 C に移り, 点 B が点 D に移るならば, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

[定理 3.5.4] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の各点 A, B, C について,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} , \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} .$$

3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 P, Q, R, S に対して, ベクトル $a = \overrightarrow{PQ}$ と $b = \overrightarrow{RS}$ を考える.



$$a - b =$$

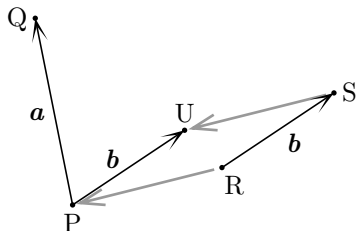
[定理 3.6.2] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ において, ある平行移動で, 点 A が点 C に移り, 点 B が点 D に移るならば, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

[定理 3.5.4] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の各点 A, B, C について,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$

3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 P, Q, R, S に対して, ベクトル $a = \overrightarrow{PQ}$ と $b = \overrightarrow{RS}$ を考える. 右図のように, 点 R が点 P に移る平行移動によって, 点 S が点 U に移るとする.

$$a - b =$$



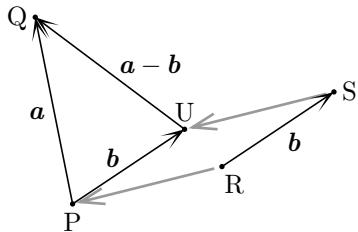
[定理 3.6.2] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ において、ある平行移動で、点 A が点 C に移り、点 B が点 D に移るならば、 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

[定理 3.5.4] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の各点 A, B, C について、

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} , \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} .$$

3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 P, Q, R, S に対して、ベクトル $a = \overrightarrow{PQ}$ と $b = \overrightarrow{RS}$ を考える. 右図のように、点 R が点 P に移る平行移動によって、点 S が点 U に移るとする. このとき、定理 3.6.2 により $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PU}$ なので、定理 3.5.4 により

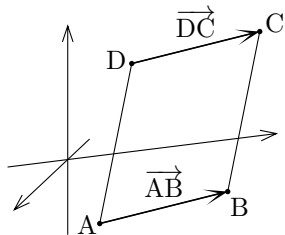
$$a - b = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PU} = \overrightarrow{UQ} .$$



[定理 3.6.2] 3次元座標空間 R^3 において、ある平行移動で、点 A が点 C に移り、点 B が点 D に移るならば、 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

[定理 3.6.3] 3次元座標空間 R^3 の点 A, B, C, D について、 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ならば、ある平行移動で、点 A が点 C に移り、点 B が点 D に移る.

3次元座標空間 R^3 の点 A, B, C, D について、A, B, C, D を頂点とする四角形 ABCD があるとする. 定理 3.6.2 と定理 3.6.3 とにより、 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ であることは、ある平行移動で点 A が点 C に移り点 B が点 D に移ることと同値であり、これは四角形 ABCD が平行四辺形であることと同値である.



[定理 3.6.4] 3次元座標空間 R^3 の点 A, B, C, D を頂点とする四角形 ABCD について、

$$\text{四角形 } ABCD \text{ 平行四辺形である} \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} .$$

例 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 A, B, C, D について, 四角形 $ABCD$ は平行四辺形で, $A = (1, 3, 2)$, $B = (5, 6, 4)$, $C = (8, 9, 7)$ とする. 点 D を求める. 四角形 $ABCD$ が平行四辺形である条件は $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. 点 D の位置ベクトルを d とおくと,

$$\overrightarrow{AB} = (5, 6, 4) - (1, 3, 2) = (4, 3, 2), \quad \overrightarrow{DC} = (8, 9, 7) - d.$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ より $(4, 3, 2) = (8, 9, 7) - d$ なので, $d = (8, 9, 7) - (4, 3, 2) = (4, 6, 5)$. 従って $D = (4, 6, 5)$. 終

問3.6 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 A, B, C, D について, 四角形 $ABCD$ は平行四辺形で, $A = (1, 2, 3)$, $C = (5, 4, 6)$, $D = (8, 9, 7)$ とする. 点 B を求めよ.
点 B の位置ベクトルを $\mathbf{b}$ とおく.

$$\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - (1, 2, 3), \quad \overrightarrow{DC} = (5, 4, 6) - (8, 9, 7) = (-3, -5, -1).$$

四角形 $ABCD$ は平行四辺形なので $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, よって, $\mathbf{b} - (1, 2, 3) = (-3, -5, -1)$, $\mathbf{b} = (-3, -5, -1) + (1, 2, 3) = (-2, -3, 2)$. 従って $C = (-2, -3, 2)$.