

3.5

3次元座標空間の点とベクトル

実数の 3 項組の全体 $\mathbf{R}^3$ は, $\mathbf{R}^3$ の要素どうしの加法および実数と $\mathbf{R}^3$ の要素との乗法を付け加えることによって 3 次元実ベクトル空間になる. 実数 a と b と c との 3 項組 (a, b, c) は, 3 次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点と考えることも 3 次元実ベクトルと考えることもできる. 3 次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 P の座標 (a, b, c) を 3 次元実ベクトルと考えるとき, P の位置ベクトルという.

実数の 3 項組の全体 $\mathbf{R}^3$ は, $\mathbf{R}^3$ の要素どうしの加法および実数と $\mathbf{R}^3$ の要素との乗法を付け加えることによって 3 次元実ベクトル空間になる. 実数 a と b と c との 3 項組 (a,b,c) は, 3 次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点と考えることも 3 次元実ベクトルと考えることもできる. 3 次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 P の座標 (a,b,c) を 3 次元実ベクトルと考えるとき, P の位置ベクトルという.

[定義] 各実数 a,b,c について, 3 次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 $P = (a,b,c)$ に対して 3 次元実ベクトル (a,b,c) を点 P の位置ベクトルという.

この定義より, 実数 a_1, a_2, a_3 に対して, 3 次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 $A = (a_1, a_2, a_3)$ の位置ベクトルを $\mathbf{a}$ とおくと, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

3次元座標空間 $\mathbb{R}^3$ の各点 P に対して P の位置ベクトルが唯一つ定まり,
各ベクトル p に対して p を位置ベクトルとする点が唯一つ定まる.

3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の各点 P に対して P の位置ベクトルが唯一つ定まり、各ベクトル p に対して p を位置ベクトルとする点が唯一つ定まる。

[定理 3.5.1] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 A の位置ベクトルを a とおき点 B の位置ベクトルを b とおくと、

$$A = B \Leftrightarrow a = b .$$

[証明] 実数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ について、 $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$ とおくと、 $a = (a_1, a_2, a_3)$, $b = (b_1, b_2, b_3)$ なので、

$$A = B \Leftrightarrow (a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3) \Leftrightarrow a = b .$$

証明終了

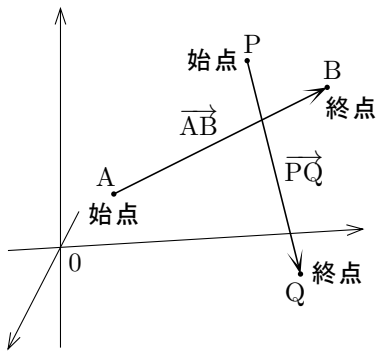
[定義] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 A, B の各々の位置ベクトルを a, b とおく. 3次元実ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ のベクトル $\overrightarrow{AB}$ を次のように定義する:

$$\overrightarrow{AB} = b - a .$$

[定義] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 A, B の各々の位置ベクトルを a, b とおく. 3次元実ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ のベクトル $\overrightarrow{AB}$ を次のように定義する:

$$\overrightarrow{AB} = b - a .$$

この定義により, 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の各点 A, B に対して3次元実ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ のベクトル $\overrightarrow{AB}$ を考えることができる. このベクトル $\overrightarrow{AB}$ を, 右図のように, 線分 AB に点 A から点 B への“向き”を付けて表現する. このような向き付けられた線分を有向線分という. 点 A から点 B への有向線分において, 点 A を始点といい, 点 B を終点という.



例 3次元座標空間の点 $A = (8, -1, -2)$ と $B = (5, 7, -6)$ とに対して3次元実ベクトル $\overrightarrow{AB}$ を求める. 点 A の位置ベクトルは $(3, 7)$ で点 B の位置ベクトルは $(5, 4)$ なので,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= (5, 7, -6) - (8, -1, -2) = (5 - 8, 7 - (-1), -6 - (-2)) \\ &= (-3, 8, -4) .\end{aligned}$$

終

問3.5 3次元座標空間の点 $P = (7, 3, -2)$ と $Q = (9, -5, 4)$ とに対して3次元実ベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を求めよ.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= (9, -5, 4) - (7, 3, -2) = (9 - 7, -5 - 3, 4 - (-2)) \\ &= (2, -8, 6) .\end{aligned}$$

終

3次元実ベクトル a に対して, 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 A, B について $\overrightarrow{AB} = a$ であるとき, a を A から B へ有向線分で図示する.

[定理 3.5.2] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の原点を O とおくとき, 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の各点 A に対して3次元実ベクトル $\overrightarrow{OA}$ は A の位置ベクトルである.

[証明] 点 O は原点なので $O = (0,0,0)$, 従って点 O の位置ベクトルは $(0,0,0)$ つまり零ベクトル $\mathbf{0}$ である. 点 A の位置ベクトルを a とおくと,

$$\overrightarrow{OA} = a - \mathbf{0} = a .$$

従ってベクトル $\overrightarrow{OA}$ は点 A の位置ベクトルである.

[証明終了]

[定理 3.5.3] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の各点 A について $\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$. 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の各点 A, B について, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$ ならば $A = B$.

[証明] 点 A の位置ベクトルを a とおき点 B の位置ベクトルを b とおく.
 $\overrightarrow{AA} = a - a = \mathbf{0}$. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$ ならば, $b - a = \overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$ なので $a = b$, よって定理 3.5.1 より $A = B$.

証明終了

[定理 3.5.4] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の各点 A, B, C について,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$

証明 点 A, B, C の各々の位置ベクトルを a, b, c とおく. $\overrightarrow{AB} = b - a$,
 $\overrightarrow{BC} = c - b$, $\overrightarrow{AC} = c - a$ なので,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (b - a) + (c - b) = b - a + c - b = c - a = \overrightarrow{AC},$$

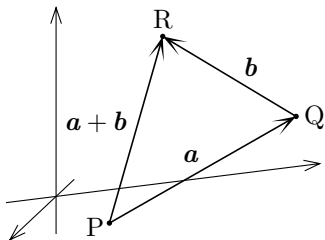
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = (b - a) - (c - a) = b - a - c + a = b - c = \overrightarrow{CB}.$$

証明終了

3次元座標空間 $\mathbb{R}^3$ の点 P, Q, R について, 3次元実ベクトル $a = \overrightarrow{PQ}$ と $b = \overrightarrow{QR}$ との和 $a + b$ を図示する. 定理 3.5.4 より,

$$a + b = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

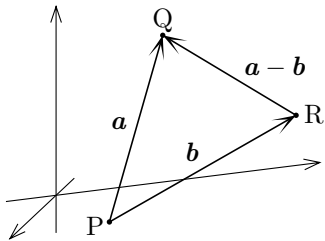
例えば右図のようになる.



また, 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の点 P, Q, R について, 3次元実ベクトル $a = \overrightarrow{PQ}$ と $b = \overrightarrow{PR}$ との差 $a - b$ を図示する. 定理 3.5.4 より,

$$a - b = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{RQ}.$$

例えば右図のようになる.



[定理 3.5.5] 3次元座標空間 $\mathbf{R}^3$ の各点 A と B について $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

[証明] 定理 3.5.4 と定理 3.5.3 より

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \mathbf{0} .$$

よって

$$\overrightarrow{BA} = \mathbf{0} - \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} .$$

[証明終了]