

3.4

3次元実ベクトルの線形結合

3次元実ベクトル a, b, c などに実数（スカラー） p, q, r などを掛けて足し合わせた形の式

$$pa, \quad pa + qb, \quad pa + qb + rc$$

などはやはり3次元実ベクトルを表す．このような形に整理できる式を， a の線形結合とか， a と b との線形結合とか， a と b と c との線形結合とかいう．線形結合は1次結合ということもある．

例 3次元実ベクトル空間において、ベクトル a と b との線形結合 $p = 2a + b$ 及び $q = 4a - 3b$ を考える. ベクトル $6p + 5q$ と $5p - 6q$ とを a と b との線形結合で表す.

$$\begin{aligned} 6p + 5q &= 6(2a + b) + 5(4a - 3b) = 12a + 6b + 20a - 15b \\ &= 32a - 9b . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5p - 6q &= 5(2a + b) - 6(4a - 3b) = 10a + 5b - 24a + 18b \\ &= 23b - 10a . \end{aligned}$$

終

問3.4.1 3次元実ベクトル a と b との線形結合 $p = 3a + 4b$ 及び $q = a - 2b$ を考える. ベクトル $5p + 6q$ と $6p - 5q$ とを a と b との線形結合で表せ.

$$5p + 6q = 5(3a + 4b) + 6(a - 2b) = 15a + 20b + 6a - 12b = 21a + 8b .$$

$$6p - 5q = 6(3a + 4b) - 5(a - 2b) = 18a + 24b - 5a + 10b = 13a + 34b .$$

例 3次元実ベクトル $\boldsymbol{a} = (4, 9, -8)$ と $\boldsymbol{b} = (5, -7, 6)$ との線形結合 $3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}$ を計算する.

$$\begin{aligned} 3\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} &= 3(4, 9, -8) + 2(5, -7, 6) = (3 \cdot 4, 3 \cdot 9, 3 \cdot (-8)) + (2 \cdot 5, 2 \cdot (-7), 2 \cdot 6) \\ &= (12, 27, -24) + (10, -14, 12) = (12 + 10, 27 + (-14), -24 + 12) \\ &= (22, 13, -12) . \end{aligned}$$

終

問3.4.2 3次元実ベクトル $\mathbf{a} = (9, -2, 4)$ と $\mathbf{b} = (8, 7, -6)$ との線形結合 $5\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ を計算せよ.

$$\begin{aligned} 5\mathbf{a} - 3\mathbf{b} &= 5(9, -2, 4) - 3(8, 7, -6) = (45, -10, 20) - (24, 21, -18) \\ &= (21, -32, 38) . \end{aligned}$$

例 3次元実ベクトル $a = (9, -6, 4)$ と $b = (7, 2, -5)$ との線形結合 $3(a - b)$ を計算する.

$$\begin{aligned} 3(a - b) &= 3\{(9, -6, 4) - (7, 2, -5)\} = 3(9 - 7, -6 - 2, 4 - (-5)) \\ &= 3(2, -8, 9) = (3 \cdot 2, 3 \cdot (-8), 3 \cdot 9) \\ &= (6, -24, 27) . \end{aligned}$$

終

問3.4.3 3次元実ベクトル $\boldsymbol{a} = (3, -9, 8)$ と $\boldsymbol{b} = (4, 6, -2)$ との線形結合 $5(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ を計算する.

$$5(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 5\{(3, -9, 8) + (4, 6, -2)\} = 5(7, -3, 6) = (35, -15, 30) . \quad \boxed{\text{終}}$$

例 次のような実数 x と y と z とを求める：

$$x(3, -6, 1) - y(-6, 4, 2) = z(-8, 1, 3) + (-1, 6, 5) .$$

与えられた等式の左辺は

$$x(3, -6, 1) - y(-6, 4, 2) = (3x + 6y, -6x - 4y, x - 2y) .$$

与えられた等式の右辺は

$$z(-8, 1, 3) + (-1, 6, 5) = (-8z - 1, z + 6, 3z + 5) .$$

与えられた等式 $x(3, -6, 1) - y(-6, 4, 2) = z(-8, 1, 3) + (-1, 6, 5)$ より

$$(3x + 6y, -6x - 4y, x - 2y) = (-8z - 1, z + 6, 3z + 5) ,$$

$$3x + 6y = -8z - 1 \quad \text{かつ} \quad -6x - 4y = z + 6 \quad \text{かつ} \quad x - 2y = 3z + 5 .$$

この連立方程式を解くと $x = 3$ かつ $y = -7$ かつ $z = 4$.

終

問3.4.4 次のような実数 x と y と z とを求めよ：

$$x(-3, 1, 4) - y(-6, 3, 2) - z(8, -6, 1) = (7, -3, 3) .$$

$$x(-3, 1, 4) - y(-6, 3, 2) - z(8, -6, 1) = (-3x + 6y - 8z, x - 3y + 6z, 4x - 2y - z)$$

$$x(-3, 1, 4) - y(-6, 3, 2) - z(8, -6, 1) = (7, -3, 3) \text{ なので, } (-3x + 6y - 8z, x - 3y + 6z, 4x - 2y - z) = (7, -3, 3) ,$$

$$-3x + 6y - 8z = 7 \text{ かつ } x - 3y + 6z = -3 \text{ かつ } 4x - 2y - z = 3 .$$

この連立方程式を解くと, $x = 3$ かつ $y = 4$ かつ $z = 1$.

終

例 3次元実ベクトル x に関する方程式 $8x + (-2, 7, 5) = 3x + (6, 4, 9)$ を解く． $8x + (-2, 7, 5) = 3x + (6, 4, 9)$ より，

$$8x - 3x = (6, 4, 9) - (-2, 7, 5) ,$$

$$5x = (8, -3, 4) ,$$

故に $x = \frac{1}{5}(8, -3, 4) = \left(\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ ．

終

問3.4.5 3次元実ベクトル x に関する方程式 $4x - (2, 9, -8) = -3x + (6, -7, 5)$ を解け.

$$4x - (2, 9, -8) = -3x + (6, -7, 5) \text{ より, } 4x + 3x = (6, -7, 5) + (2, 9, -8) \\ \text{より, } 7x = (8, 2, -3) \text{ , } x = \left(\frac{8}{7}, \frac{2}{7}, -\frac{3}{7}\right) \text{ .}$$

例 3次元実ベクトル $a = (3, 5, 1)$ と $b = (-3, -6, -1)$ と $c = (2, 6, 4)$ とに対して, 3次元実ベクトル $p = (-4, 8, 2)$ を a と b と c との線形結合で表す. a と b と c との線形結合は, ある実数 x と y と z に対するベクトル $xa + yb + zc$ のことである. $p = xa + yb + zc$ となる実数 x と y と z とを求める. 実数を表す変数 x, y, z に対して,

$$\begin{aligned} xa + yb + zc &= x(3, 5, 1) + y(-3, -6, -1) + z(2, 6, 4) \\ &= (3x - 3y + 2z, 5x - 6y + 6z, x - y + 4z) . \end{aligned}$$

$xa + yb + zc = p$ とすると,

$$(3x - 3y + 2z, 5x - 6y + 6z, x - y + 4z) = (-4, -8, 2) ,$$

よって

$$3x - 3y + 2z = -4 \quad \text{かつ} \quad 5x - 6y + 6z = -8 \quad \text{かつ} \quad x - y + 4z = 2 .$$

第1式を3倍した式 $9x - 9y + 6z = -12$ と第2式とより $4x - 3y = -4$. 第1

式を 2 倍した式 $6x - 6y + 4z = 8$ と第 3 式とより $x - y = -2$. このように連立方程式を解くと, $x = 2$ かつ $y = 4$ かつ $z = 1$. 故に $p = 2a + 4b + c$ 終

問3.4.6 3次元実ベクトル $\boldsymbol{a} = (3, 6, 1)$ と $\boldsymbol{b} = (-2, -3, 8)$ と $\boldsymbol{c} = (4, 5, -2)$ とに対して, 3次元実ベクトル $\boldsymbol{p} = (7, -4, 5)$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ と $\boldsymbol{c}$ との線形結合で表せ.

実数を表す変数 x, y, z に対して,

$$\begin{aligned} x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} &= x(3, 6, 1) + y(-2, -3, 8) + z(4, 5, -2) \\ &= (3x - 2y + 4z, 6x - 3y + 5z, x + 8y - 2z) . \end{aligned}$$

$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} + z\boldsymbol{c} = \boldsymbol{p}$ とすると,

$$(3x - 2y + 4z, 6x - 3y + 5z, x + 8y - 2z) = (7, -4, 5) ,$$

$$3x - 2y + 4z = 7 \quad \text{かつ} \quad 6x - 3y + 5z = -4 \quad \text{かつ} \quad x + 8y - 2z = 5 .$$

この連立方程式を解くと, $x = -5$ かつ $y = 3$ かつ $z = 7$. 故に
 $\boldsymbol{p} = -5\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b} + 7\boldsymbol{c}$.

終