

3.3

3次元実ベクトル

実数の 3 項組の全体

$$\mathbf{R}^3 = \{ (x, y, z) \mid x, y, z \text{ は実数} \}$$

において以下のような演算を考える. 各実数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ について, $\mathbf{R}^3$ の要素 (a_1, a_2, a_3) と (b_1, b_2, b_3) との和を次のように定義する:

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) .$$

この和をベクトル和という.

実数の 3 項組の全体

$$\mathbf{R}^3 = \{ (x, y, z) \mid x, y, z \text{ は実数} \}$$

において以下のような演算を考える. 各実数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ について, $\mathbf{R}^3$ の要素 (a_1, a_2, a_3) と (b_1, b_2, b_3) との和を次のように定義する:

$$(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) .$$

この和をベクトル和という. また, 各実数 a_1, a_2, a_3, p について, 実数 p と $\mathbf{R}^3$ の要素 (a_1, a_2, a_3) との積を次のように定義する:

$$p(a_1, a_2, a_3) = (pa_1, pa_2, pa_3) .$$

この積をスカラー積という.

例 3次元実ベクトル $(-2, -3, 4)$ と $(-5, 7, -9)$ とのベクトル和は

$$(-2, -3, 4) + (-5, 7, -9) = (-2 + (-5), -3 + 7, 4 + (-9)) = (-7, 4, -5) .$$

3次元実ベクトル $(5, -7, 9)$ の $\frac{3}{4}$ 倍は

$$\frac{3}{4}(5, -7, 9) = \left(\frac{3}{2} \cdot 5, \frac{3}{2} \cdot (-7), \frac{3}{2} \cdot 9\right) = \left(\frac{15}{2}, -\frac{21}{2}, \frac{27}{2}\right) .$$

終

実数 x と y と z との 3 項組 (x, y, z) にベクトル和及びスカラー積の演算を考えると、実数の 3 項組を 3 次元実ベクトルあるいは空間ベクトルあるいは略してベクトルという。3 次元実ベクトルに対して実数のことをスカラーという。

実数 x と y と z との 3 項組 (x, y, z) にベクトル和及びスカラー積の演算を考えると、実数の 3 項組を 3 次元実ベクトルあるいは空間ベクトルあるいは略してベクトルという。3 次元実ベクトルに対して実数のことをスカラーという。3 次元実ベクトル (x, y, z) を構成する実数 x と y と z とをベクトル (x, y, z) の成分という。一つめの成分 x を第 1 成分といい、二つめの成分 y を第 2 成分といい、三つめの成分 z を第 3 成分という。

実数 x と y と z との 3 項組 (x, y, z) を 3 次元座標空間の点 (の座標) と考えるとき, 3.1 節で述べたように, 実数の 3 項組の全体 $\mathbf{R}^3$ は 3 次元座標空間である. 実数 x と y と z との 3 項組 (x, y, z) を 3 次元実ベクトルと考えるとき, 実数の 3 項組の全体 $\mathbf{R}^3$ を 3 次元実ベクトル空間という.

実数 x と y と z との 3 項組 (x, y, z) を 3 次元座標空間の点 (の座標) と考えるとき, 3.1 節で述べたように, 実数の 3 項組の全体 $\mathbf{R}^3$ は 3 次元座標空間である. 実数 x と y と z との 3 項組 (x, y, z) を 3 次元実ベクトルと考えるとき, 実数の 3 項組の全体 $\mathbf{R}^3$ を 3 次元実ベクトル空間という. 実数 x と y と z との 3 項組 (x, y, z) は, 3 次元座標空間の点と考えることも 3 次元実ベクトルと考えることもできる. 3 次元座標空間の点と考えると和とか積とかの演算はできない. 3 次元実ベクトルと考えるとベクトル和およびスカラー積の演算ができる.

以後，3次元実ベクトルを太文字で表す.

3次元実ベクトル $(0,0,0)$ を零ベクトルといい, $\mathbf{0}$ と書き表す:

$$\mathbf{0} = (0,0,0) .$$

ベクトル平面の零ベクトル $(0,0)$ と 3次元実ベクトル空間の零ベクトル $(0,0,0)$ とは別物なので, 本来は, 例えば ${}_2\mathbf{0} = (0,0)$ と ${}_3\mathbf{0} = (0,0,0)$ とかのように, 異なる記号を使うべきである. しかし, 平面ベクトルか 3次元実ベクトルかは大抵は文脈で分かるので, どちらの零ベクトルも $\mathbf{0}$ で表す.

[定理 3.3.1] 3次元実ベクトル a, b, c 及び各実数 p, q について, 以下のことが成り立つ:

(加法の交換法則)

$$a + b = b + a ;$$

(加法の結合法則)

$$a + (b + c) = (a + b) + c ;$$

$$0 + a = a + 0 = a ;$$

$$a + (-a) = -a + a = 0 ;$$

$$1a = a ;$$

(スカラー積の結合法則)

$$p(qa) = (pq)a ;$$

(スカラー積の分配法則)

$$p(a + b) = pa + pb , \quad (p + q)a = pa + qa .$$

これらのうちのいくつかを証明する.

各実数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ について, 3次元実ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ とに対して,

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \ ,$$

$$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = (b_1, b_2, b_3) + (a_1, a_2, a_3) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \ ,$$

よって $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

各実数 a_1, a_2, a_3 について,, 3次元実ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ に対して,
 $-\boldsymbol{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$ なので,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) &= (a_1, a_2, a_3) + (-a_1, -a_2, -a_3) \\ &= (a_1 + (-a_1), a_2 + (-a_2), a_3 + (-a_3)) = (0, 0, 0) \\ &= \mathbf{0} \ ,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} &= (-a_1, -a_2, -a_3) + (a_1, a_2, a_3) \\ &= (-a_1 + a_1, -a_2 + a_2, -a_3 + a_3) = (0, 0, 0) \\ &= \mathbf{0} \ .\end{aligned}$$

よって, $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$, $-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.

各実数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ について, 3次元実ベクトル $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ と $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ と各実数 p に対して,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= p\{(a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3)\} = p(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \\ &= (p(a_1 + b_1), p(a_2 + b_2), p(a_3 + b_3)) \\ &= (pa_1 + pb_1, pa_2 + pb_2, pa_3 + pb_3) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p\mathbf{a} + p\mathbf{b} &= p(a_1, a_2, a_3) + p(b_1, b_2, b_3) = (pa_1, pa_2, pa_3) + (pb_1, pb_2, pb_3) \\ &= (pa_1 + pb_1, pa_2 + pb_2, pa_3 + pb_3) , \end{aligned}$$

よって $p(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = p\mathbf{a} + p\mathbf{b}$.

[定理 3.3.2] 零ベクトル $\mathbf{0}$ 及び各 3 次元実ベクトル $\mathbf{a}$ について $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

[証明] 実数 a_1, a_2, a_3 に対して $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ とおくと,

$$0\mathbf{a} = 0 \cdot (a_1, a_2, a_3) = (0 \cdot a_1, 0 \cdot a_2, 0 \cdot a_3) = (0, 0, 0) = \mathbf{0} .$$

証明終了

[定理 3.3.3] 零ベクトル $\mathbf{0}$ および各実数 p について $p\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

[証明] $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ なので,

$$p\mathbf{0} = p \cdot (0, 0, 0) = (p \cdot 0, p \cdot 0, p \cdot 0) = (0, 0, 0) = \mathbf{0} .$$

証明終了

3次元実ベクトル a に対し、実数 -1 とベクトル a とのスカラー積 $-1a$ を $-a$ と略記する： $-a = -1 \cdot a$. 3次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^3$ のベクトル a に対して、ベクトル $-a$ を a の逆ベクトルという.

[定理 3.3.4] 各実数 a_1, a_2, a_3 について、3次元実ベクトル $a = (a_1, a_2, a_3)$ に対して $-a = (-a_1, -a_2, -a_3)$.

証明

$$-a = -1 \cdot (a_1, a_2, a_3) = (-1a_1, -1a_2, -1a_3) = (-a_1, -a_2, -a_3) .$$

証明終了

3次元実ベクトル a と b に対し, $a + (-b)$ を $a - b$ と書き表す:

$$a - b = a + (-b) .$$

[定理 3.3.5] 各実数 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ について, 3次元実ベクトル $a = (a_1, a_2, a_3)$ と $b = (b_1, b_2, b_3)$ に対して $a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$.

証明

$$\begin{aligned} a - b &= a + (-b) = (a_1, a_2, a_3) + (-(b_1, b_2, b_3)) \\ &= (a_1, a_2, a_3) + (-b_1, -b_2, -b_3) = (a_1 + (-b_1), a_2 + (-b_2), a_3 + (-b_3)) \\ &= (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3) . \end{aligned}$$

証明終了

例 3次元実ベクトル $(7, 4, 6)$ から 3次元実ベクトル $(2, -5, 8)$ を引くと

$$(7, 4, 6) - (2, -5, 8) = (7 - 2, 4 - (-5), 6 - 8) = (5, 9, -2) .$$

終