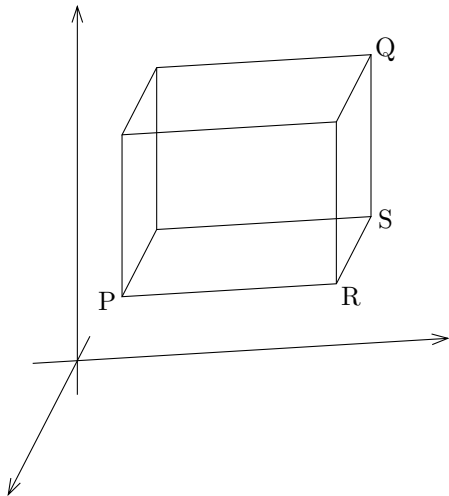


3.2

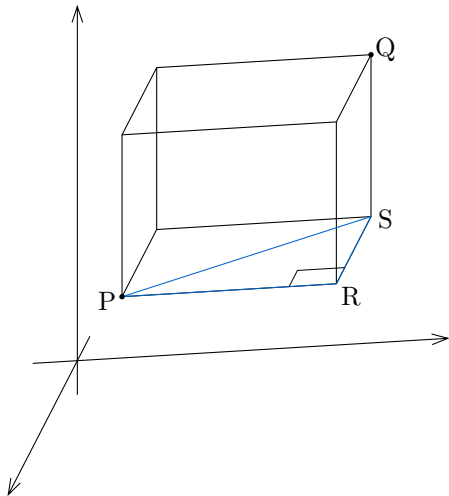
3次元座標空間における2点間の距離

3次元座標空間において、点 P ,
 Q, R, S が右図のように直方体の頂
点であるとする.



3次元座標空間において、点 P, Q, R, S が右図のように直方体の頂点であるとする．角 PRS は直角なので三角形 PRS は直角三角形である．ピタゴラスの定理により、

$$\overline{PS}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RS}^2 .$$

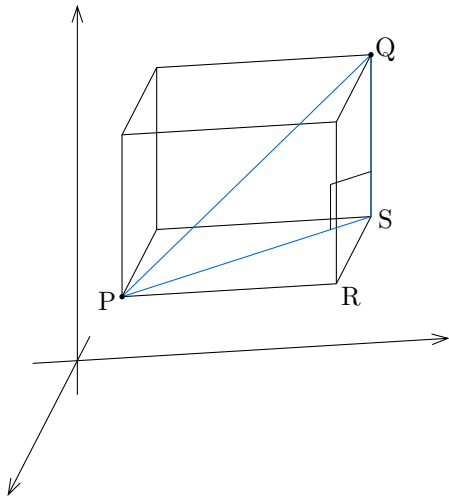


3次元座標空間において、点 P, Q, R, S が右図のように直方体の頂点であるとする．角 PRS は直角なので三角形 PRS は直角三角形である．ピタゴラスの定理により、

$$\overline{PS}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RS}^2 .$$

角 PSQ は直角なので三角形 PSQ は直角三角形である．ピタゴラスの定理により、

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PS}^2 + \overline{SQ}^2$$

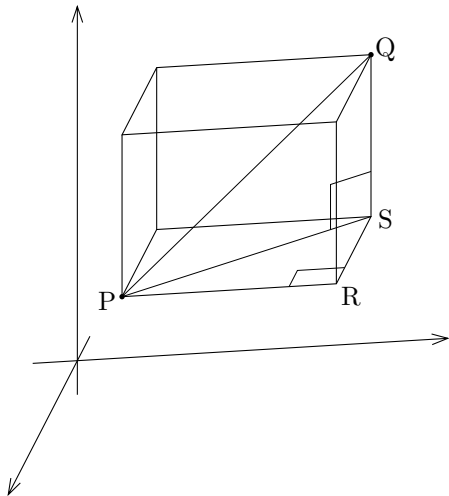


3次元座標空間において、点 P, Q, R, S が右図のように直方体の頂点であるとする．角 PRS は直角なので三角形 PRS は直角三角形である．ピタゴラスの定理により、

$$\overline{PS}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RS}^2 .$$

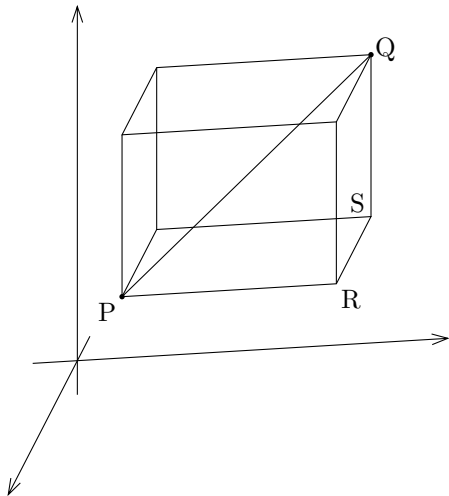
角 PSQ は直角なので三角形 PSQ は直角三角形である．ピタゴラスの定理により、

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= \overline{PS}^2 + \overline{SQ}^2 \\ &= \overline{PR}^2 + \overline{RS}^2 + \overline{SQ}^2 .\end{aligned}$$



直方体の頂点 P, Q, R, S について,

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RS}^2 + \overline{SQ}^2 .$$



直方体の頂点 P, Q, R, S について,

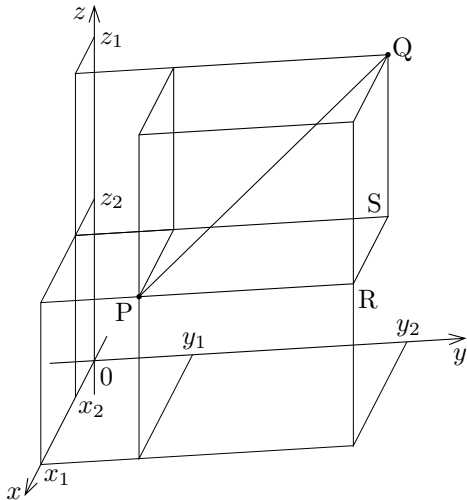
$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RS}^2 + \overline{SQ}^2 .$$

実数 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ に対して,

$$P = (x_1, y_1, z_1) ,$$

$$Q = (x_2, y_2, z_2)$$

とする.



直方体の頂点 P, Q, R, S について,

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RS}^2 + \overline{SQ}^2 .$$

実数 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ に対して,

$$P = (x_1, y_1, z_1) ,$$

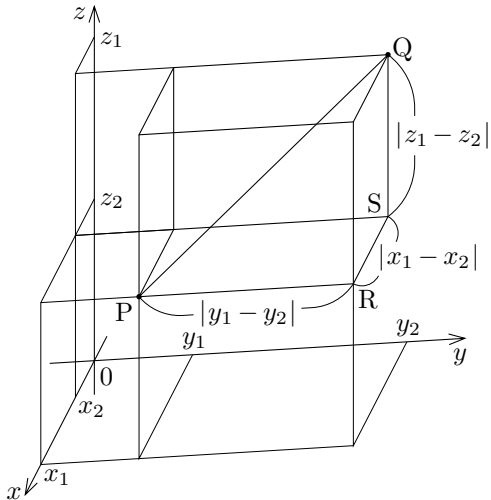
$$Q = (x_2, y_2, z_2)$$

とする.

$$\overline{PR} = |y_1 - y_2| ,$$

$$\overline{RS} = |x_1 - x_2| ,$$

$$\overline{SQ} = |z_1 - z_2| .$$



直方体の頂点 P, Q, R, S について,

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RS}^2 + \overline{SQ}^2 .$$

実数 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ に対して,

$$P = (x_1, y_1, z_1) ,$$

$$Q = (x_2, y_2, z_2)$$

とする.

$$\overline{PR} = |y_1 - y_2| ,$$

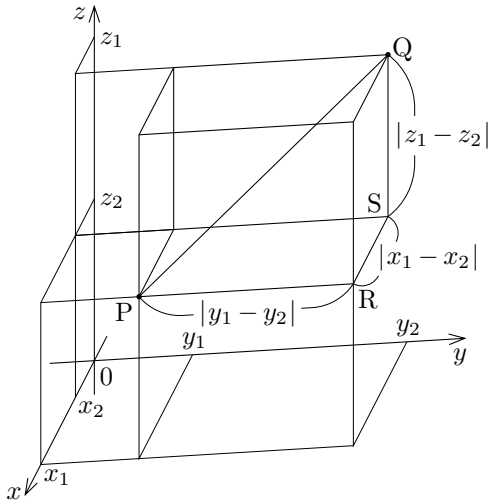
$$\overline{RS} = |x_1 - x_2| ,$$

$$\overline{SQ} = |z_1 - z_2| .$$

よって

$$\overline{PQ}^2 = \overline{PR}^2 + \overline{RS}^2 + \overline{SQ}^2$$

$$= |y_1 - y_2|^2 + |x_1 - x_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$$



$$\overline{PQ}^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 \ .$$

$\overline{PQ} \geq 0$ なので

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \ .$$

[定理 3.2] 3次元座標空間において、実数 $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$ に対して点 $P = (x_1, y_1, z_1)$ と点 $Q = (x_2, y_2, z_2)$ との間の距離は

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2} \ .$$

例 実数を表す変数 x, y, z に関する次の条件と同値でなるべく簡単な条件を求めなさい：3次元座標空間において点 (x, y, z) が点 $(-9, 4, -1)$ と点 $(-6, 8, -2)$ とから等距離にある．点 (x, y, z) が点 $(-9, 4, -1)$ と点 $(-6, 8, -2)$ と等距離にある条件は，

$$\sqrt{(x+9)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2} = \sqrt{(x+6)^2 + (y-8)^2 + (z+2)^2} ,$$

$$(x+9)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 = (x+6)^2 + (y-8)^2 + (z+2)^2 ,$$

$$x^2 + 18x + 81 + y^2 - 8y + 16 + z^2 + 2z + 1$$

$$= x^2 + 12x + 36 + y^2 - 16y + 64 + z^2 + 4z + 4 ,$$

$$6x + 8y - 2z = 6 ,$$

つまり $3x + 4y - z = 3$.

終

問3.2.1 実数を表す変数 x, y, z に関する次の条件と同値となるべく簡単な条件を求めよ：3次元座標空間において点 (x, y, z) が点 $(2, 5, 8)$ と点 $(7, 6, 4)$ とから等距離にある．

点 (x, y, z) が点 $(2, 5, 8)$ と点 $(7, 6, 4)$ とから等距離にある条件は，

$$(x-2)^2 + (y-5)^2 + (z-8)^2 = (x-7)^2 + (y-6)^2 + (z-4)^2 ,$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 + z^2 - 16z + 64$$

$$= x^2 - 14x + 49 + y^2 - 12y + 36 + z^2 - 8z + 16 ,$$

$$10x + 2y - 8z = 8 ,$$

つまり $5x + y - 4z = 4$ ．

終

例 3次元座標空間において点 $(-1, 3, -4)$ と点 $(2, 6, -6)$ と点 $(9, 1, -2)$ と点 $(8, 5, -5)$ とから等距離にある点を求める．点 $(-1, 3, -4)$ と点 $(2, 6, -6)$ と点 $(9, 1, -2)$ と点 $(8, 5, -5)$ とから等距離にある点を (x, y, z) とおく．点 (x, y, z) が点 $(-1, 3, -4)$ と点 $(2, 6, -6)$ とから等距離にある条件は，

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = (x-2)^2 + (y-6)^2 + (z+6)^2 ,$$

整理すると $3x + 3y - 2z = 25$ ．点 (x, y, z) が点 $(2, 6, -6)$ と点 $(9, 1, -2)$ とから等距離にある条件は，

$$(x-2)^2 + (y-6)^2 + (z+6)^2 = (x-9)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 ,$$

整理すると $7x - 5y + 4z = 5$ ．点 (x, y, z) が点 $(9, 1, -2)$ と点 $(8, 5, -5)$ とから等距離にある条件は，

$$(x-9)^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = (x-8)^2 + (y-5)^2 + (z+5)^2 ,$$

整理すると $x - 4y + 3z = -14$ ．

$$3x + 3y - 2z = 25 \quad \text{かつ} \quad 7x - 5y + 4z = 5 \quad \text{かつ} \quad x - 4y + 3z = -14 \quad .$$

これらの方程式より, $x = 4$ かつ $y = 3$ かつ $z = -2$. よって, 点 $(-1, 3, -4)$ と点 $(2, 6, -6)$ と点 $(9, 1, -2)$ と点 $(8, 5, -5)$ とから等距離にある点 $(4, 3, -2)$ である.

終

問3.2.2 3次元座標空間において点 $(-2, 1, 8)$ と点 $(-4, 4, 7)$ と点 $(-8, 2, -1)$ と点 $(-7, 5, 3)$ とから等距離にある点を求めよ.

点 $(-2, 1, 8)$ と点 $(-4, 4, 7)$ と点 $(-8, 2, -1)$ と点 $(-7, 5, 3)$ とから等距離にある点を (x, y, z) とおく. 点 (x, y, z) が点 $(-2, 1, 8)$ と点 $(-4, 4, 7)$ とから等距離にある条件は,

$$(x+2)^2 + (y-1)^2 + (z-8)^2 = (x+4)^2 + (y-4)^2 + (z-7)^2 ,$$

整理すると $2x - 3y + z = -6$. 点 (x, y, z) が点 $(-4, 4, 7)$ と点 $(-8, 2, -1)$ とから等距離にある条件は,

$$(x+4)^2 + (y-4)^2 + (z-7)^2 = (x+8)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 ,$$

整理すると $2x + y + 4z = 3$. 点 (x, y, z) が点 $(-8, 2, -1)$ と点 $(-7, 5, 3)$ とから等距離にある条件は,

$$(x+8)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = (x+7)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 ,$$

整理すると $x + 3y + 4z = 7$. これらの方程式より, $x = 2$ かつ $y = 3$ かつ $z = -1$. よって, 点 $(-2, 1, 8)$ と点 $(-4, 4, 7)$ と点 $(-8, 2, -1)$ と点 $(-7, 5, 3)$ とから等距離にある点は $(2, 3, -1)$ である. 終