

2.8

平面ベクトルの大きさ

任意の実数 a に対して, a の絶対値 $|a|$ は $|a| = \sqrt{a^2}$ であった. このことと同様に, 平面ベクトル a の大きさ $|a|$ を定義する. ベクトル平面 $\mathbf{R}^2$ の任意のベクトル a について, 定理 2.7.3 により $a \cdot a \geq 0$ なので, 実数 $\sqrt{a \cdot a}$ がある.

任意の実数 a に対して, a の絶対値 $|a|$ は $|a| = \sqrt{a^2}$ であった. このことと同様に, 平面ベクトル a の大きさ $|a|$ を定義する. ベクトル平面 $\mathbf{R}^2$ の任意のベクトル a について, 定理 2.7.3 により $a \cdot a \geq 0$ なので, 実数 $\sqrt{a \cdot a}$ がある.

[定義] 任意の平面ベクトル a に対して, 実数 $\sqrt{a \cdot a}$ を a の大きさといい, $|a|$ と書き表す:

$$|a| = \sqrt{a \cdot a} .$$

[定理 2.8.1] 任意の平面ベクトル a について,

$$|a|^2 = a \cdot a .$$

[証明] $a \cdot a \geq 0$ なので $|a|^2 = \sqrt{a \cdot a}^2 = a \cdot a$.

[証明終了]

[定理 2.8.2] 任意の平面ベクトル a について,

$$|a| = 0 \Leftrightarrow a = \mathbf{0} .$$

証明 定理 2.7.4 により,

$$|a| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a \cdot a} = 0 \Leftrightarrow a \cdot a = 0 \Leftrightarrow a = \mathbf{0} .$$

証明終了

[定理 2.8.3] 任意の平面ベクトル a 及び任意の実数 k について,

$$|ka| = |k||a| .$$

証明

$$|ka| = \sqrt{(ka) \cdot (ka)} = \sqrt{k^2 a \cdot a} = \sqrt{k^2} \sqrt{a \cdot a} = |k||a| .$$

証明終了

つまり, 各平面ベクトル a 及び各実数 k について, ベクトル ka の大きさはベクトル a の大きさの $|k|$ 倍である.

[定理 2.8.4] 各実数 a_1, a_2 について, 平面ベクトル (a_1, a_2) の大きさ $|(a_1, a_2)|$ は

$$|(a_1, a_2)| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} .$$

証明

$$|(a_1, a_2)| = \sqrt{(a_1, a_2) \cdot (a_1, a_2)} = \sqrt{a_1 a_1 + a_2 a_2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} .$$

証明終了

例 平面ベクトル $(-3, 5)$ の大きさは

$$|(-3, 5)| = \sqrt{(-3)^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} .$$

終

問2.8.1 以下の平面ベクトルの大きさを求めよ.

(1) $(5, -2)$.

(2) $(3 - \sqrt{2}, 1 + 3\sqrt{2})$.

(1)

$$|(5, -2)| = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{29} \text{ .}$$

(2)

$$|(3 - \sqrt{2}, 1 + 3\sqrt{2})| = \sqrt{9 - 6\sqrt{2} + 2 + 1 + 6\sqrt{3} + 18} = \sqrt{30} \text{ .}$$

[定理 2.8.5] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の各点 A, B について,

$$|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB} .$$

[証明] 実数 a_1, a_2, b_1, b_2 に対して $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ とおく. 更に, 点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ と, 点 B の位置ベクトルを $\boldsymbol{b}$ とおく: $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$.

$$\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2) .$$

よって定理 2.8.4 により

$$|\overrightarrow{AB}| = |(b_1 - a_1, b_2 - a_2)| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} .$$

定理 2.2 により,

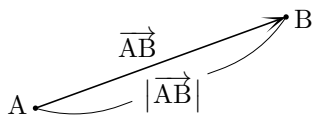
$$\overline{AB}^2 = (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 ,$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} .$$

故に $|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$.

[証明終了]

つまり、座標平面 $\mathbf{R}^2$ の各点 A, B について、例えば右図のように、ベクトル $\overrightarrow{AB}$ の大きさ $|\overrightarrow{AB}|$ は線分 AB の長さである。



例 平面ベクトル a と b について, $|a|=2$ かつ $|b|=3$ かつ $a \cdot b = -4$ とする. ベクトル $8a-5b$ と $7a+6b$ との内積を計算する.

$$\begin{aligned}(8a-5b) \cdot (7a+6b) &= 8a \cdot (7a+6b) - 5b \cdot (7a+6b) \\&= 8a \cdot 7a + 8a \cdot 6b - (5b \cdot 7a + 5b \cdot 6b) \\&= 56a \cdot a + 48a \cdot b - 35b \cdot a - 30b \cdot b \\&= 56|a|^2 + 13a \cdot b - 30|b|^2 = 56 \cdot 4 - 13 \cdot (-4) - 30 \cdot 9 \\&= 6 \ .\end{aligned}$$

よって $(8a-5b) \cdot (7a+6b) = 6$.

終

問2.8.2 平面ベクトル a と b について, $|a| = 3$ かつ $|b| = 2$ かつ $a \cdot b = -4$ とする. ベクトル $5a + 6b$ と $8a - 7b$ との内積を計算せよ.

$$(5a + 6b) \cdot (8a - 7b) = 35a \cdot a - 40a \cdot b + 42b \cdot a - 48b \cdot b$$

$$= 35|a|^2 + 2a \cdot b - 48|b|^2$$

$$= 35 \cdot 9 + 2 \cdot (-4) - 48 \cdot 4 = 315 - 52 - 192$$

$$= 71 .$$

例 平面ベクトル a と b について, $|a|=4$ かつ $|b|=5$ かつ $a \cdot b = -18$ とする. ベクトル $2a+3b$ の大きさ $|2a+3b|$ を求める.

$$\begin{aligned}|2a+3b|^2 &= (2a+3b) \cdot (2a+3b) = 4a \cdot a + 6a \cdot b + 6b \cdot a + 9b \cdot b \\&= 4|a|^2 + 12a \cdot b + 9|b|^2 = 4 \cdot 16 + 12 \cdot (-18) + 9 \cdot 25 \\&= 73 .\end{aligned}$$

よって $|2a+3b| = \sqrt{73}$.

終

問2.8.3 平面ベクトル a と b について, $|a|=5$ かつ $|b|=6$ かつ $a \cdot b = 26$ とする. ベクトル $3a - 2b$ の大きさ $|3a - 2b|$ を求めよ.

$$\begin{aligned} |3a - 2b|^2 &= (3a - 2b) \cdot (3a - 2b) = 9a \cdot a - 6a \cdot b - 6b \cdot a + 4b \cdot b \\ &= 9|a|^2 - 12a \cdot b + 4|b|^2 = 9 \cdot 25 - 12 \cdot 26 + 4 \cdot 36 \\ &= 57 . \end{aligned}$$

よって $|3a - 2b| = \sqrt{57}$.

[定義] 平面ベクトル a が単位ベクトルであるとは $|a| = 1$ となることである.

[定義] 平面ベクトル a が単位ベクトルであるとは $|a| = 1$ となることである.

[例] 次のような実数 x を求める: 平面ベクトル $\left(x, \frac{2}{3}\right)$ が単位ベクトル

である. $\left|\left(x, \frac{2}{3}\right)\right| = 1$ なので, $\sqrt{x^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1$, $x^2 + \frac{4}{9} = 1$, $x^2 = \frac{5}{9}$,

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

終

[定義] 平面ベクトル a が単位ベクトルであるとは $|a| = 1$ となることである.

[例] 次のような実数 x を求める: 平面ベクトル $\left(x, \frac{2}{3}\right)$ が単位ベクトル

である. $\left|\left(x, \frac{2}{3}\right)\right| = 1$ なので, $\sqrt{x^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = 1$, $x^2 + \frac{4}{9} = 1$, $x^2 = \frac{5}{9}$,

$$x = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

終

[問2.8.4] 次のような実数 y を求めよ: 平面ベクトル $\left(-\frac{3}{4}, y\right)$ が単位ベクトルである.

$$\left|\left(-\frac{3}{4}, y\right)\right| = 1 \text{ なので, } \sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + y^2} = 1, \quad \frac{9}{16} + y^2 = 1, \quad y^2 = \frac{7}{16},$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{7}{16}} = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

終

例えば, $x^2 \leq 3^2$ である実数 x の範囲は $-3 \leq x \leq 3$ である. 一般的に次の定理が成り立つ.

[定理] 実数 a, b について, $b \geq 0$ かつ $a^2 \leq b^2$ ならば, $-b \leq a \leq b$.

[定理 2.8.6] 各平面ベクトル a と b について,

$$-|a||b| \leq a \cdot b \leq |a||b| .$$

証明 $a = 0$ のとき, 定理 2.7.1 により $a \cdot b = 0 \cdot b = 0$, 定理 2.8.2 により $|a| = |0| = 0$ なので $|a||b| = 0$, よって $-|a||b| \leq a \cdot b \leq |a||b|$. $a \neq 0$ とする. 定理 2.8.2 により $|a| \neq 0$ なので $|a|^2 > 0$. 定理 2.8.1 により,

$$\begin{aligned} |(a \cdot b)a - |a|^2 b|^2 &= \{(a \cdot b)a - |a|^2 b\} \cdot \{(a \cdot b)a - |a|^2 b\} \\ &= (a \cdot b)^2 (a \cdot a) - 2(a \cdot b)|a|^2 (a \cdot b) + |a|^4 (b \cdot b) \\ &= (a \cdot b)^2 |a|^2 - 2|a|^2 (a \cdot b)^2 + |a|^4 |b|^2 \\ &= -|a|^2 (a \cdot b)^2 + |a|^4 |b|^2 \\ &= |a|^2 \{|a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2\} , \end{aligned}$$

$|(a \cdot b)a - |a|^2 b|^2 \geq 0$ なので $|a|^2 \{|a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2\} \geq 0$, $|a|^2 > 0$ なので $|a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2 \geq 0$, よって $(a \cdot b)^2 \leq (|a||b|)^2$. $|a||b| \geq 0$ なので $-|a||b| \leq a \cdot b \leq |a||b|$.

証明終了