

## 2.7

### 平面ベクトルの内積

[定義] 各実数  $a_1, a_2, b_1, b_2$  について, 平面ベクトル  $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$  と  $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$  との内積  $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$  を次のように定義する:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2 \ .$$

[定義] 各実数  $a_1, a_2, b_1, b_2$  について, 平面ベクトル  $a = (a_1, a_2)$  と  $b = (b_1, b_2)$  との内積  $a \cdot b$  を次のように定義する:

$$a \cdot b = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2 .$$

平面ベクトルの内積はスカラー (実数) でありベクトルではない. 平面ベクトル  $a$  と  $b$  との内積 (を表す式)  $a \cdot b$  において  $a$  と  $b$  との間の点 “ $\cdot$ ” は省略してはならない.

**例** 平面ベクトル  $(5,6)$  と  $(-8,7)$  との内積を計算する.

$$(5,6) \cdot (-8,7) = 5 \cdot (-8) + 6 \cdot 7 = -40 + 42 = 2 .$$

平面ベクトル  $\left(\frac{7}{3}, \frac{9}{2}\right)$  と  $(-8,5)$  との内積を計算する.

$$\left(\frac{7}{3}, \frac{9}{2}\right) \cdot (-8,5) = \frac{7}{3} \cdot (-8) + \frac{9}{2} \cdot 5 = -\frac{56}{3} + \frac{45}{2} = -\frac{112}{6} + \frac{135}{6} = \frac{23}{6} .$$

平面ベクトル  $(5, -2\sqrt{3})$  と  $(4\sqrt{3}, 7)$  との内積を計算する.

$$(5, -2\sqrt{3}) \cdot (4\sqrt{3}, 7) = 5 \cdot 4\sqrt{3} + (-2\sqrt{3}) \cdot 7 = 20\sqrt{3} - 14\sqrt{3} = 6\sqrt{3} . \quad \boxed{\text{終}}$$

**問2.7.1** 平面ベクトルの以下の内積を計算せよ.

(1) 平面ベクトル  $(7, 8)$  と  $(9, -6)$  との内積.

(2) 平面ベクトル  $(7, 4)$  と  $\left(\frac{5}{2}, -\frac{8}{3}\right)$  との内積.

(3) 平面ベクトル  $(6\sqrt{5}, 7)$  と  $(2, -3\sqrt{5})$  との内積.

(1)

$$(7, 8) \cdot (9, -6) = 7 \cdot 8 + 9 \cdot (-6) = 56 - 54 = 2 .$$

(2)

$$(7, 4) \cdot \left(\frac{5}{2}, -\frac{8}{3}\right) = 7 \cdot \frac{5}{2} + 4 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{35}{2} - \frac{32}{3} = \frac{105}{6} - \frac{96}{6} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} .$$

(3)

$$(6\sqrt{5}, 7) \cdot (2, -3\sqrt{5}) = 6\sqrt{5} \cdot 2 + 7 \cdot (-3\sqrt{5}) = 12\sqrt{5} - 21\sqrt{5} = -9\sqrt{5} .$$

**問2.7.2** 次のような実数  $x$  を求めよ：平面ベクトル  $(x, 2)$  と  $(3, 5)$  との内積は  $0$  である．

$$(x, 2) \cdot (3, 5) = 0 \quad , \quad 3x + 10 = 0 \quad , \quad x = -\frac{10}{3} \quad .$$

[定理 2.7.1] 各平面ベクトル  $a, b, c$  および各スカラー  $p, q$  について, 以下のことが成り立つ:

(内積の交換法則) 
$$a \cdot b = b \cdot a ;$$

(内積の結合法則) 
$$(pa) \cdot b = p(a \cdot b) , \quad a \cdot (pb) = p(a \cdot b) ;$$

(内積の分配法則) 
$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c , \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c ;$$

$$0 \cdot a = 0 , \quad a \cdot 0 = 0 .$$

**[証明]** 実数  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$  に対して  $a = (a_1, a_2)$  ,  $b = (b_1, b_2)$  ,  $c = (c_1, c_2)$  とおく.

$$a \cdot b = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) = a_1 b_1 + a_2 b_2 ,$$

$$b \cdot a = (b_1, b_2) \cdot (a_1, a_2) = b_1 a_1 + b_2 a_2 = a_1 b_1 + a_2 b_2 ,$$

よって  $a \cdot b = b \cdot a$  .

$$(p\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \{p(a_1, a_2)\} \cdot (b_1, b_2) = (pa_1, pa_2) \cdot (b_1, b_2) = pa_1b_1 + pa_2b_2 ,$$

$$p(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = p\{(a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)\} = p(a_1b_1 + a_2b_2) = pa_1b_1 + pa_2b_2 ,$$

よって  $(p\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = p(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  . 同様に  $\mathbf{a} \cdot (p\mathbf{b}) = p(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$  .

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= (a_1, a_2) \cdot \{(b_1, b_2) + (c_1, c_2)\} = (a_1, a_2) \cdot (b_1 + c_1, b_2 + c_2) \\ &= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) = a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} &= (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2) + (a_1, a_2) \cdot (c_1, c_2) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_1c_1 + a_2c_2 \\ &= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 , \end{aligned}$$

よって  $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$  . 同様に  $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$  .

$$\mathbf{0} \cdot \mathbf{a} = (0, 0) \cdot (a_1, a_2) = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 = 0 .$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{0} = (a_1, a_2) \cdot (0, 0) = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 = 0 .$$

証明終了

**例** 平面ベクトル  $a$  と  $b$  について、 $a \cdot a = 7$  かつ  $b \cdot b = 8$  かつ  $a \cdot b = 6$  とする．ベクトル  $2a + 3b$  と  $5a - 4b$  との内積を計算する．

$$\begin{aligned}(2a + 3b) \cdot (5a - 4b) &= 2a \cdot (5a - 4b) + 3b \cdot (5a - 4b) \\&= 2a \cdot 5a - 2a \cdot 4b + 3b \cdot 5a - 3b \cdot 4b \\&= 10a \cdot a - 8a \cdot b + 15a \cdot b - 12b \cdot b \\&= 10a \cdot a + 7a \cdot b - 12b \cdot b ,\end{aligned}$$

$a \cdot a = 7$  かつ  $b \cdot b = 8$  かつ  $a \cdot b = 6$  なので、

$$10a \cdot a + 7a \cdot b - 12b \cdot b = 10 \cdot 7 + 7 \cdot 6 - 12 \cdot 8 = 70 + 42 - 96 = 16 .$$

よって  $(2a + 3b) \cdot (5a - 4b) = 16$  ．

**終**

**問2.7.3** 平面ベクトル  $a$  と  $b$  について,  $a \cdot a = 8$  かつ  $b \cdot b = 7$  かつ  $a \cdot b = -6$  とする. ベクトル  $3a - 2b$  と  $4a + 5b$  との内積を計算せよ.

$$\begin{aligned}(3a - 2b) \cdot (4a + 5b) &= 12a \cdot a + 15a \cdot b - 8a \cdot b - 10b \cdot b \\&= 12a \cdot a + 7a \cdot b - 10b \cdot b \\&= 12 \cdot 8 + 7 \cdot (-6) - 10 \cdot 7 = 96 - 42 - 70 \\&= -16 .\end{aligned}$$

[定理] 各実数  $a$  について  $a^2 \geq 0$  .

これと似たことが平面ベクトルについても成り立つ.

[定理] 各実数  $a$  について  $a^2 \geq 0$  .

これと似たことが平面ベクトルについても成り立つ.

[定理 2.7.2] 各平面ベクトル  $\mathbf{a}$  について  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$  .

[証明] 実数  $a_1, a_2$  に対して  $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$  とおく.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (a_1, a_2) \cdot (a_1, a_2) = a_1 a_1 + a_2 a_2 = a_1^2 + a_2^2 .$$

$a_1, a_2$  は実数なので  $a_1^2 \geq 0$  かつ  $a_2^2 \geq 0$  , よって  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 \geq 0$  .

証明終了

[定理] 各実数  $a$  について,

$$a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 .$$

これと似たことが平面ベクトルの内積についても成り立つ.

[定理] 各実数  $a$  について,

$$a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 .$$

これと似たことが平面ベクトルの内積についても成り立つ.

[定理 2.7.3] 各平面ベクトル  $a$  について,

$$a \cdot a = 0 \Leftrightarrow a = \mathbf{0} .$$

[証明] 実数  $a_1, a_2$  に対して  $a = (a_1, a_2)$  とおく.

$$a \cdot a = (a_1, a_2) \cdot (a_1, a_2) = a_1 a_1 + a_2 a_2 = a_1^2 + a_2^2 .$$

$a_1, a_2$  は実数なので  $a_1^2 \geq 0$  ,  $a_2^2 \geq 0$  . 従って

$$a \cdot a = 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 = 0 \Leftrightarrow a_1^2 = 0 \text{ かつ } a_2^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a_1 = 0 \text{ かつ } a_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \mathbf{0} .$$

証明終了