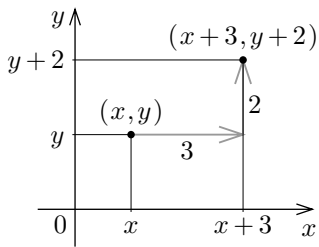


2.6

座標平面における平行移動とベクトル

座標平面 $\mathbf{R}^2$ において、例えば平面ベクトル $(2,3)$ による平行移動とは、各点 (x,y) を点 $(x+2,y+3)$ に移す変換である.

[定義] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において、実数 p, q に対するベクトル (p, q) による平行移動とは、各点 (x, y) を点 $(x+p, y+q)$ に移す変換である.



[定義] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において, 実数 p, q に対するベクトル (p, q) による平行移動とは, 各点 (x, y) を点 $(x + p, y + q)$ に移す変換である.

[定義] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ において, 実数 p, q に対するベクトル (p, q) による平行移動とは, 各点 (x, y) を点 $(x + p, y + q)$ に移す変換である.

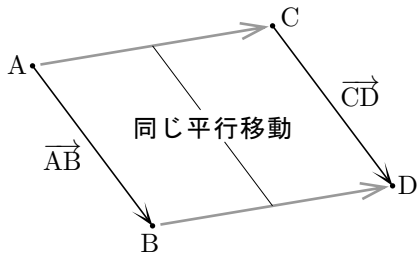
[定理 2.6.1] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ において, 原点を O とおくとき, 点 A と B 及び平面ベクトル s について, s による平行移動で A が B に移ることは $\overrightarrow{OA} + s = \overrightarrow{OB}$ と同値である.

[証明] 点 A, B の各々の位置ベクトルを $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ とおく. $s = (s_1, s_2)$ とおく.

$$\begin{aligned} s \text{ による平行移動で } A \text{ が } B \text{ に移る} &\Leftrightarrow (a_1 + s_1, a_2 + s_2) = (b_1, b_2) \\ &\Leftrightarrow (a_1, a_2) + (s_1, s_2) = (b_1, b_2) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + s = \overrightarrow{OB}. \end{aligned}$$

証明終了

[定理 2.6.2] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ において、ある平行移動で、点 A が点 C に移り、点 B が点 D に移るならば、 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.



ならば $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

ある平行移動によって始点どうし終点どうし重ねることができる有向線分は同じベクトルを表す.

[定理 2.6.2] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ において，ある平行移動で，点 A が点 C に移り，点 B が点 D に移るならば， $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

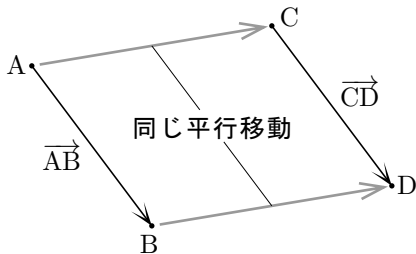
[証明] 座標平面の原点を O とおく．ある平面ベクトル s による平行移動で，点 A が点 C に移り，点 B が点 D に移ると仮定する．定理 2.6.1 により， $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + s$, $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + s$. 故に

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + s - (\overrightarrow{OA} + s) = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB} .$$

証明終了

[定理 2.6.3] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の点 A, B, C, D について, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ならば, ある平行移動で, 点 A が点 C に移り, 点 B が点 D に移る.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ならば



[定理 2.6.3] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 A, B, C, D について, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ならば, ある平行移動で, 点 A が点 C に移り, 点 B が点 D に移る.

[証明] 座標平面の原点を O とおく. 平面ベクトル s を $s = \overrightarrow{AC}$ とおく.

$$\overrightarrow{OA} + s = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC},$$

定理 2.6.1 により s による平行移動で A は C に移る. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ならば,

$$\overrightarrow{OB} + s = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD},$$

定理 2.6.1 により s による平行移動で B は D に移る.

[証明終了]

[定理 2.6.2] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において, ある平行移動で, 点 A が点 C に移り, 点 B が点 D に移るならば, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

[定理 2.5.4] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の各点 A, B, C について,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \ , \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \ .$$

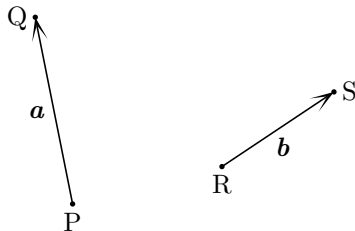
[定理 2.6.2] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において, ある平行移動で, 点 A が点 C に移り, 点 B が点 D に移るならば, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

[定理 2.5.4] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の各点 A, B, C について,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} , \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} .$$

座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 P, Q, R, S に対して,
ベクトル $a = \overrightarrow{PQ}$ と $b = \overrightarrow{RS}$ を考える.

$$a + b =$$



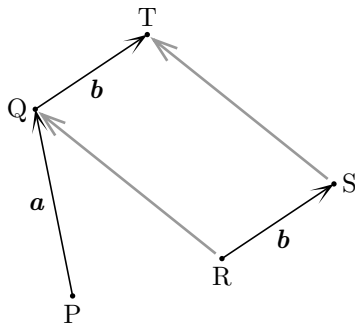
[定理 2.6.2] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ において、ある平行移動で、点 A が点 C に移り、点 B が点 D に移るならば、 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

[定理 2.5.4] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の各点 A, B, C について、

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} , \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} .$$

座標平面 $\mathbb{R}^2$ の点 P, Q, R, S に対して、
ベクトル $a = \overrightarrow{PQ}$ と $b = \overrightarrow{RS}$ を考える。
右図のように、点 R が点 Q に移る平行移動によって、点 S が点 T に移るとする。

$$a + b =$$



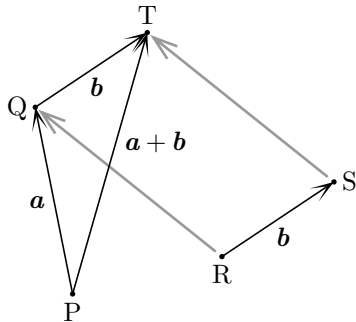
[定理 2.6.2] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ において、ある平行移動で、点 A が点 C に移り、点 B が点 D に移るならば、 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

[定理 2.5.4] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の各点 A, B, C について、

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} , \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} .$$

座標平面 $\mathbb{R}^2$ の点 P, Q, R, S に対して、ベクトル $a = \overrightarrow{PQ}$ と $b = \overrightarrow{RS}$ を考える。
右図のように、点 R が点 Q に移る平行移動によって、点 S が点 T に移るとする。このとき、定理 2.6.2 により $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{QT}$ なので、定理 2.5.4 により

$$a + b = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QT} = \overrightarrow{PT} .$$

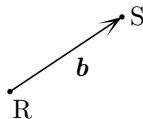
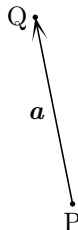


[定理 2.6.2] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において, ある平行移動で, 点 A が点 C に移り, 点 B が点 D に移るならば, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

[定理 2.5.4] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の各点 A, B, C について,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \ , \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \ .$$

座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 P, Q, R, S に対して,
ベクトル $a = \overrightarrow{PQ}$ と $b = \overrightarrow{RS}$ を考える.



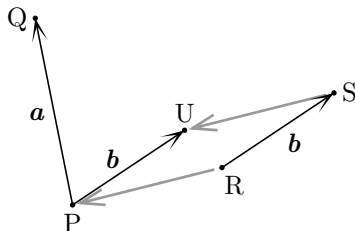
$$a - b =$$

[定理 2.6.2] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ において, ある平行移動で, 点 A が点 C に移り, 点 B が点 D に移るならば, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

[定理 2.5.4] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の各点 A, B, C について,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$

座標平面 $\mathbb{R}^2$ の点 P, Q, R, S に対して,
ベクトル $a = \overrightarrow{PQ}$ と $b = \overrightarrow{RS}$ を考える.
右図のように, 点 R が点 P に移る平行移動
によって, 点 S が点 U に移るとする.



$$a - b =$$

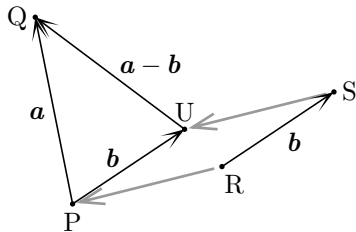
[定理 2.6.2] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ において、ある平行移動で、点 A が点 C に移り、点 B が点 D に移るならば、 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

[定理 2.5.4] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の各点 A, B, C について、

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} , \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} .$$

座標平面 $\mathbb{R}^2$ の点 P, Q, R, S に対して、ベクトル $a = \overrightarrow{PQ}$ と $b = \overrightarrow{RS}$ を考える。右図のように、点 R が点 P に移る平行移動によって、点 S が点 U に移るとする。このとき、定理 2.6.2 により $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PU}$ なので、定理 2.5.4 により

$$a - b = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PU} = \overrightarrow{UQ} .$$



例 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の互いに異なる3点 A, B, C に対して, 線分 AB の中点を P と, 線分 AC の中点を Q と, 線分 BC の中点を R とおく. 平面ベクトル $p = \overrightarrow{AP}$ と $q = \overrightarrow{AQ}$ とを考える. ある平行移動で点 Q が点 A に点 R が点 P に移るので,

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{AP} = p.$$

ある平行移動で点 P が点 A に点 B が点 P に移るので,

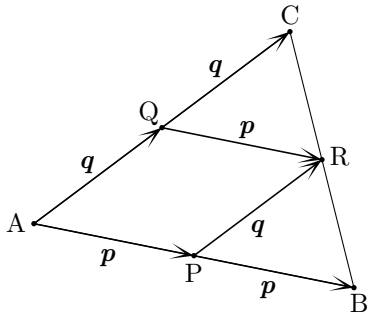
$$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AP} = p.$$

ある平行移動で点 P が点 A に点 R が点 Q に移るので,

$$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AQ} = q.$$

ある平行移動で点 Q が点 A に点 C が点 Q に移るので,

$$\overrightarrow{QC} = \overrightarrow{AQ} = q.$$



$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{QR} = \boldsymbol{p} , \quad \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{PR} = \boldsymbol{q} .$$

これらのことより以下の等式が成り立つ：

$$\overrightarrow{RQ} = -\overrightarrow{QR} = -\boldsymbol{p} ,$$

$$\overrightarrow{RP} = -\overrightarrow{PR} = -\boldsymbol{q} ,$$

$$\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PR} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} ,$$

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} ,$$

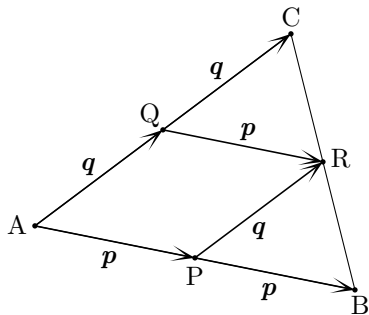
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{p} ,$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QC} = \boldsymbol{q} + \boldsymbol{q} = 2\boldsymbol{q} ,$$

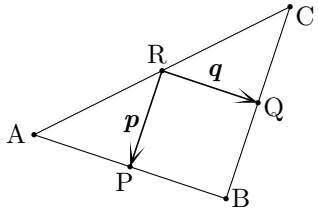
$$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AB} = \boldsymbol{q} - 2\boldsymbol{p} ,$$

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC} = \boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{q} ,$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\boldsymbol{q} - 2\boldsymbol{p} .$$



問2.6.1 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の互いに異なる3点 A, B, C に対して, 線分 AB の中点を P と, 線分 BC の中点を Q と, 線分 CQ の中点を R とおく. 平面ベクトル $p = \overrightarrow{RP}$ と $q = \overrightarrow{RQ}$ とを考える. 以下の平面ベクトルを p と q との線形結合で表せ.



$$(1) \quad \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{QR} = -\overrightarrow{RQ} = -q .$$

$$(2) \quad \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{PR} = -\overrightarrow{RP} = -p .$$

$$(3) \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{RQ} - \overrightarrow{RP} = q - p .$$

$$(4) \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{RQ} = 2\overrightarrow{RQ} = 2q .$$

$$(5) \quad \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{QC} = \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PR} = 2\overrightarrow{PR} = -2\overrightarrow{RP} = -2p .$$

$$(6) \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AR} + \overrightarrow{RC} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{PQ} = 2(q - p) .$$

$$(7) \quad \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PQ} = q + (q - p) = 2q - p .$$

$$(8) \quad \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QC} = (q - p) + (-p) = q - 2p .$$

例 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 A, B, C, D, E, F について、右図のように六角形 $ABCDEF$ が正六角形であるとする。その外接円の中心を O とおく。平面ベクトル $p = \overrightarrow{AB}$ と $q = \overrightarrow{BC}$ とを考える。このとき、

$$\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{AB} = p ,$$

$$\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BC} = q .$$

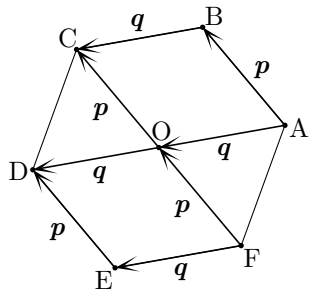
これより、

$$\overrightarrow{DE} = -\overrightarrow{ED} = -p , \quad \overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{FE} = -q ,$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = q - p ,$$

$$\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{FO} \quad \text{なので,}$$

$$\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FO} - \overrightarrow{AO} = p - q .$$



更に,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{q} ,$$

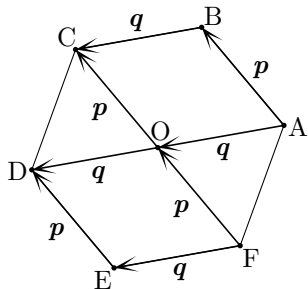
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \boldsymbol{q} + (\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p}) = 2\boldsymbol{q} - \boldsymbol{p} ,$$

$$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \boldsymbol{q} - \boldsymbol{p} + (-\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{q} - 2\boldsymbol{p} ,$$

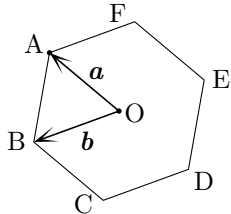
$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = -\boldsymbol{p} + (-\boldsymbol{q}) = -\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} ,$$

$$\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = -\boldsymbol{q} + (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) = \boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{q} ,$$

$$\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} = (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{p} = 2\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q} . \boxed{\text{終}}$$



問2.6.2 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 A, B, C, D, E, F について、右図のように、六角形 $ABCDEF$ が正六角形であるとする。その外接円の中心を O とおく。平面ベクトル $a = \overrightarrow{OA}$ と $b = \overrightarrow{OB}$ とを考える。以下の平面ベクトルを a と b との線形結合で表せ。

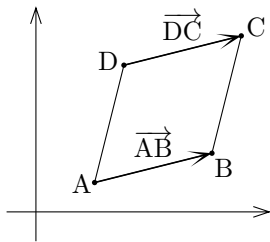


- (1) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = b - a$.
- (2) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = a - b$.
- (3) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = b - a + (-a) = b - 2a$.
- (4) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = -a + (-b) = -a - b$.
- (5) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = -b + (a - b) = a - 2b$.
- (6) $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} = a - b + a = 2a - b$.
- (7) $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = a + b$.
- (8) $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} = b + (b - a) = 2b - a$.

[定理 2.6.2] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ において、ある平行移動で、点 A が点 C に移り、点 B が点 D に移るならば、 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

[定理 2.6.3] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の点 A, B, C, D について、 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ならば、ある平行移動で、点 A が点 C に移り、点 B が点 D に移る.

座標平面 $\mathbb{R}^2$ の点 A, B, C, D について、 A, B, C, D を頂点とする四角形 $ABCD$ があるとする.
定理 2.6.2 と定理 2.6.3 とにより、 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ であることは、ある平行移動で点 A が点 C に移り点 B が点 D に移ることと同値であり、これは四角形 $ABCD$ が平行四辺形であることと同値である.



[定理 2.6.4] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の点 A, B, C, D を頂点とする四角形 $ABCD$ について、

$$\text{四角形 } ABCD \text{ 平行四辺形である} \iff \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} .$$

例 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の点 A, B, C, D について, 四角形 $ABCD$ は平行四辺形で, $A = (1, 3)$, $B = (5, 4)$, $C = (6, 9)$ とする. 点 D を求める. 四角形 $ABCD$ が平行四辺形である条件は $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. 点 D の位置ベクトルを d とおくと,

$$\overrightarrow{AB} = (5, 4) - (1, 3) = (4, 1), \quad \overrightarrow{DC} = (6, 9) - d.$$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ より $(4, 1) = (6, 9) - d$ なので, $d = (6, 9) - (4, 1) = (2, 8)$. 故に $D = (2, 8)$. 終

問2.6.3 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 A, B, C, D について, 四角形 $ABCD$ は平行四辺形で, $A = (3, -2)$, $B = (5, 6)$, $D = (7, 4)$ とする. 点 C を求めよ.

点 C の位置ベクトルを $\boldsymbol{c}$ とおく.

$$\overrightarrow{AB} = (5, 6) - (3, -2) = (2, 8), \quad \overrightarrow{DC} = \boldsymbol{c} - (7, 4).$$

四角形 $ABCD$ は平行四辺形なので $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, よって, $(2, 8) = \boldsymbol{c} - (7, 4)$, $\boldsymbol{c} = (2, 8) + (7, 4) = (9, 12)$. 従って $C = (9, 12)$.

問2.6.4 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 A, B, C, D について, 四角形 $ABCD$ は平行四辺形で, $B = (4, 2)$, $C = (9, 6)$, $D = (2, 9)$ とする. 点 A を求めよ.

点 A の位置ベクトルを $\boldsymbol{a}$ とおく.

$$\overrightarrow{AB} = (4, 2) - \boldsymbol{a}, \quad \overrightarrow{DC} = (9, 6) - (2, 9) = (7, -3).$$

四角形 $ABCD$ は平行四辺形なので $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, よって $(4, 2) - \boldsymbol{a} = (7, -3)$, $\boldsymbol{a} = (4, 2) + (7, -3) = (-3, 5)$. 従って $A = (-3, 5)$. 終