

2.5

座標平面の点とベクトル

実数の順序対の全体 $\mathbf{R}^2$ の要素は，加法および実数と $\mathbf{R}^2$ の要素との乗法を付け加えることによって平面ベクトルになった．実数 a と b との順序対 (a, b) は，座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点と考えることも平面ベクトルと考えることもできる．

実数の順序対の全体 $\mathbf{R}^2$ の要素は，加法および実数と $\mathbf{R}^2$ の要素との乗法を付け加えることによって平面ベクトルになった．実数 a と b との順序対 (a,b) は，座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点と考えることも平面ベクトルと考えることもできる．座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 P の座標 (a,b) を平面ベクトルと考えるとき， P の位置ベクトルという．

実数の順序対の全体 $\mathbf{R}^2$ の要素は，加法および実数と $\mathbf{R}^2$ の要素との乗法を付け加えることによって平面ベクトルになった．実数 a と b との順序対 (a,b) は，座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点と考えることも平面ベクトルと考えることもできる．座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 P の座標 (a,b) を平面ベクトルと考えるとき， P の位置ベクトルという．

[定義] 各実数 a,b について，座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 $P = (a,b)$ に対して平面ベクトル (a,b) を点 P の位置ベクトルという．

この定義により，実数 a_1, a_2 に対して，座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 $A = (a_1, a_2)$ の位置ベクトルを a とおくと， $a = (a_1, a_2)$ ．

座標平面 $\mathbb{R}^2$ の各点 P に対して P の位置ベクトルが唯一つ定まり, 各平面ベクトル p に対して p を位置ベクトルとする点が唯一つ定まる.

座標平面 $\mathbf{R}^2$ の各点 P に対して P の位置ベクトルが唯一つ定まり、各平面ベクトル p に対して p を位置ベクトルとする点が唯一つ定まる。

[定理 2.5.1] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 A の位置ベクトルを a とおき点 B の位置ベクトルを b とおくと、

$$A = B \iff a = b .$$

[証明] 実数 a_1, a_2, b_1, b_2 について、 $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ とおくと、
 $a = (a_1, a_2)$, $b = (b_1, b_2)$ なので、

$$A = B \iff (a_1, a_2) = (b_1, b_2) \iff a = b .$$

証明終了

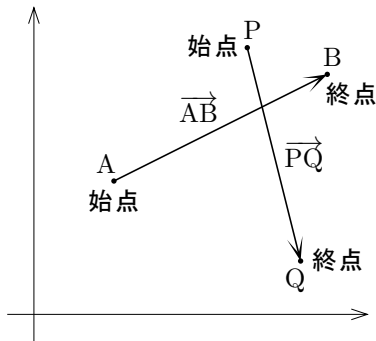
[定義] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の点 A, B の各々の位置ベクトルを a, b とおく. 平面ベクトル $\overrightarrow{AB}$ を次のように定義する:

$$\overrightarrow{AB} = b - a .$$

[定義] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 A, B の各々の位置ベクトルを a, b とおく. 平面ベクトル $\overrightarrow{AB}$ を次のように定義する:

$$\overrightarrow{AB} = b - a .$$

この定義により, 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の各点 A, B に対して平面ベクトル $\overrightarrow{AB}$ を考えることができる. このベクトル $\overrightarrow{AB}$ を, 右図のように, 線分 AB に点 A から点 B への“向き”を表す矢印を付けて表現する. このように向き付けられた線分を有向線分という. 点 A から点 B への有向線分において, 点 A を始点といい, 点 B を終点という.



例 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 $A = (3, 7)$ と $B = (5, 4)$ とに対して平面ベクトル $\overrightarrow{AB}$ を求める. 点 A の位置ベクトルは $(3, 7)$ で点 B の位置ベクトルは $(5, 4)$ なので,

$$\overrightarrow{AB} = (5, 4) - (3, 7) = (2, -3) . \quad \boxed{\text{終}}$$

問2.5 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 $P = (3, -4)$ と $Q = (8, 2)$ とに対してベクトル $\overrightarrow{PQ}$ を求めよ.

$$\overrightarrow{PQ} = (8, 2) - (3, -4) = (8 - 3, 2 - (-4)) = (5, 6) .$$

終

平面ベクトル a に対して、座標平面 R^2 の点 A, B について $\overrightarrow{AB} = a$ であるとき、 a を A から B へ有向線分で図示する。

例 平面ベクトル $a = (4, 5)$ に対して、座標平面 R^2 の点 $A = (1, 2)$ と点 $B = (5, 7)$ について

$$\overrightarrow{AB} = (5, 7) - (1, 2) = (4, 5) = a$$

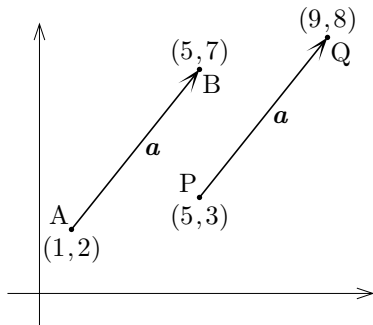
なので、 A から B への有向線分で a を図示する。座標平面 R^2 の点 $P = (3, 4)$ と点 $Q = (7, 9)$ について

$$\overrightarrow{PQ} = (7, 9) - (3, 4) = (4, 5) = a$$

なので、 P から Q への有向線分で a を図示する。

終

このように、一つのベクトルを図示する有向線分の位置は様々である。



[定理 2.5.2] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の原点を O とおくとき, 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の各点 A に対してベクトル $\overrightarrow{OA}$ は A の位置ベクトルである.

[証明] 点 O は原点なので $O = (0,0)$, 従って点 O の位置ベクトルは $(0,0)$ つまり零ベクトル 0 である. 点 A の位置ベクトルを a とおくと, $\overrightarrow{OA} = a - 0 = a$. 従ってベクトル $\overrightarrow{OA}$ は点 A の位置ベクトルである.

証明終了

[定理 2.5.3] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の各点 A について $\overrightarrow{AA} = 0$. 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の各点 A, B について, $\overrightarrow{AB} = 0$ ならば $A = B$.

[証明] 座標平面 $\mathbb{R}^2$ の点 A の位置ベクトルを a とおき点 B の位置ベクトルを b とおく. $\overrightarrow{AA} = a - a = 0$. $\overrightarrow{AB} = 0$ ならば, $b - a = \overrightarrow{AB} = 0$ なので $a = b$, よって定理 2.5.1 により $A = B$.

証明終了

[定理 2.5.4] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の各点 A, B, C について,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$

[証明] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 A, B, C の各々の位置ベクトルを a, b, c とおく.

$\overrightarrow{AB} = b - a$, $\overrightarrow{BC} = c - b$, $\overrightarrow{AC} = c - a$ なので,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = (b - a) + (c - b) = b - a + c - b = c - a = \overrightarrow{AC},$$

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = (b - a) - (c - a) = b - a - c + a = b - c = \overrightarrow{CB}.$$

証明終了

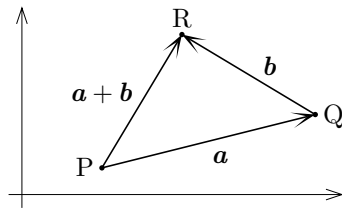
[定理 2.5.4] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の各点 A, B, C について,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$

座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 P, Q, R について,
ベクトル $a = \overrightarrow{PQ}$ と $b = \overrightarrow{QR}$ との和
 $a + b$ を図示する. 定理 2.5.4 により,

$$a + b = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}.$$

例えば右図のようになる.



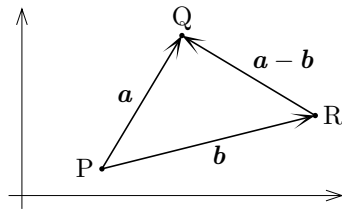
[定理 2.5.4] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の各点 A, B, C について,

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}.$$

座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 P, Q, R について,
ベクトル $a = \overrightarrow{PQ}$ と $b = \overrightarrow{PR}$ との差
 $a - b$ を図示する. 定理 2.5.4 により,

$$a - b = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{RQ}.$$

例えば右図のようになる.



[定理 2.5.5] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の各点 A と B について $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

[証明] 定理 2.5.4 と定理 2.5.3 とにより

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \mathbf{0} ,$$

よって

$$\overrightarrow{BA} = \mathbf{0} - \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB} .$$

証明終了