

2.4

平面ベクトルの線形結合

平面ベクトル a, b, c などに実数（スカラー） p, q, r などを掛けて足し合わせた形の式

$$pa, \quad pa + qb, \quad pa + qb + rc$$

などはやはり平面ベクトルを表す．このような形に整理できる式を， a の線形結合とか， a と b との線形結合とか， a と b と c との線形結合とかいう．線形結合は 1 次結合ということもある．

例 平面ベクトル a と b との線形結合 $p = 2a + b$ 及び $q = 4a - 3b$ を考える．平面ベクトル $6p + 5q$ と $5p - 6q$ とを a と b との線形結合で表す．

$$6p + 5q = 6(2a + b) + 5(4a - 3b) = 12a + 6b + 20a - 15b = 32a - 9b .$$

$$5p - 6q = 5(2a + b) - 6(4a - 3b) = 10a + 5b - 24a + 18b = 23b - 10a . \quad \text{終}$$

問2.4.1 平面ベクトル a と b との線形結合 $p = 3a + 4b$ 及び $q = a - 2b$ を考える．平面ベクトル $5p + 6q$ と $6p - 5q$ とを a と b との線形結合で表せ．

$$5p + 6q = 5(3a + 4b) + 6(a - 2b) = 15a + 20b + 6a - 12b = 21a + 8b .$$

$$6p - 5q = 6(3a + 4b) - 5(a - 2b) = 18a + 24b - 5a + 10b = 13a + 34b .$$

例 平面ベクトル $a = (2, 3)$ と $b = (-4, 7)$ との線形結合 $8a - 5b$ を計算する.

$$\begin{aligned} 8a - 5b &= 8(2, 3) - 5(-4, 7) = (8 \cdot 2, 8 \cdot 3) - (5 \cdot (-4), 5 \cdot 7) \\ &= (16, 24) - (-20, 35) = (16 - (-20), 24 - 35) \\ &= (36, -11) . \end{aligned}$$

終

問2.4.2 平面ベクトル $a = (4, 7)$ と $b = (6, -8)$ との線形結合 $5a + 2b$ を計算せよ.

$$5a + 2b = 5(4, 7) + 2(6, -8) = (20, 35) + (12, -16) = (32, 19) .$$

例 平面ベクトル $\boldsymbol{a} = (-2, 4)$ と $\boldsymbol{b} = (5, -6)$ との線形結合 $8(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$ を計算する.

$$\begin{aligned} 8(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) &= 8\{(-2, 4) + (5, -6)\} = 8(-2 + 5, 4 + (-6)) \\ &= 8(3, -2) = (8 \cdot 3, 8 \cdot (-2)) \\ &= (24, -16) . \end{aligned}$$

終

問2.4.3 平面ベクトル $\boldsymbol{a} = (8, 4)$ と $\boldsymbol{b} = (2, -5)$ との線形結合 $7(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})$ を計算せよ.

$$7(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 7\{(8, 4) - (2, -5)\} = 7(6, 9) = (42, 63) .$$

例 次のような実数 x と y とを求める： $x(9,5) + (6,2) = y(8,4)$. 与えられた等式より,

$$x(9,5) + (6,2) - (6,2) - y(8,4) = y(8,4) - y(8,4) - (6,2) ,$$

$$x(9,5) - y(8,4) = -(6,2) ,$$

左辺は $x(9,5) - y(8,4) = (9x, 5x) - (8y, 4y) = (9x - 8y, 5x - 4y)$ なので,

$$(9x - 8y, 5x - 4y) = (-6, -2) ,$$

$$9x - 8y = -6 \quad \text{かつ} \quad 5x - 4y = -2 \quad .$$

この連立方程式を解くと, $x = 2$ かつ $y = 3$.

終

問2.4.4 次のような実数 x と y とを求めよ : $x(4,7) - (5,2) = y(-3,6)$.

$$x(4,7) - y(-3,6) = (5,2) ,$$

$$(4x + 3y, 7x - 6y) = (5,2) ,$$

$$4x + 3y = 5 \text{ かつ } 7x - 6y = 2 ,$$

この連立方程式を解くと $x = \frac{4}{5}$ かつ $y = \frac{3}{5}$.

例 平面ベクトル x に関する方程式 $9x + (2, -3) = 5x + (7, 6)$ を解く.

$$9x + (2, -3) = 5x + (7, 6) \text{ より, } 9x - 5x = (7, 6) - (2, -3), \quad 4x = (5, 9), \\ x = \frac{1}{4}(5, 9) = \left(\frac{5}{4}, \frac{9}{4}\right).$$

終

問2.4.5 平面ベクトル $\boldsymbol{x}$ に関する方程式 $5\boldsymbol{x} + (3, -2) = -4\boldsymbol{x} + (8, 6)$ を解け.

$$\begin{aligned} 5\boldsymbol{x} + (3, -2) &= -4\boldsymbol{x} + (8, 6) \quad \text{より,} \quad 5\boldsymbol{x} - (-4\boldsymbol{x}) = (8, 6) - (3, -2), \\ 9\boldsymbol{x} &= (5, 8), \quad \boldsymbol{x} = \left(\frac{5}{9}, \frac{8}{9}\right). \end{aligned}$$

例 平面ベクトル $\boldsymbol{a} = (5, 7)$ と $\boldsymbol{b} = (6, 8)$ に対して，平面ベクトル $\boldsymbol{p} = (2, 4)$ を $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との線形結合で表す． $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ との線形結合は，ある実数 x と y に対するベクトル $x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$ のことである． $\boldsymbol{p} = x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b}$ となる実数 x と y とを求める．実数を表す変数 x, y に対して，

$$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = x(5, 7) + y(6, 8) = (5x + 6y, 7x + 8y) .$$

$x\boldsymbol{a} + y\boldsymbol{b} = \boldsymbol{p}$ とすると，

$$(5x + 6y, 7x + 8y) = (2, 4) ,$$

$$5x + 6y = 2 \quad \text{かつ} \quad 7x + 8y = 4 .$$

この連立方程式を解くと， $x = 4$ かつ $y = -3$ ． 故に $\boldsymbol{p} = 4\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$ ．

終

問2.4.6 平面ベクトル $a = (4, 5)$ と $b = (-3, -2)$ とに対して, 平面ベクトル $p = (7, 8)$ を a と b との線形結合で表せ.

実数を表す変数 x と y について $xa + yb = p$ とすると,

$$x(4, 5) + y(-3, -2) = (7, 8) ,$$

$$(4x - 3y, 5x - 2y) = (8, 7) ,$$

$$4x - 3y = 7 \quad \text{かつ} \quad 5x - 2y = 8 ;$$

この連立方程式を解くと, $x = \frac{10}{7}$ かつ $y = -\frac{3}{7}$. 従って $p = \frac{10}{7}a - \frac{3}{7}b$.