

2.3

平面ベクトル

実数の順序対の全体

$$\mathbf{R}^2 = \{ (x, y) \mid x, y \text{ は実数} \}$$

において以下のような演算を考える． 各実数 a_1, a_2, b_1, b_2 について， $\mathbf{R}^2$ の要素 (a_1, a_2) と (b_1, b_2) との和を次のように定義する：

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) .$$

この和をベクトル和という．

実数の順序対の全体

$$\mathbf{R}^2 = \{ (x, y) \mid x, y \text{ は実数} \}$$

において以下のような演算を考える．各実数 a_1, a_2, b_1, b_2 について， $\mathbf{R}^2$ の要素 (a_1, a_2) と (b_1, b_2) との和を次のように定義する：

$$(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) .$$

この和をベクトル和という．また，各実数 a_1, a_2, p について，実数 p と $\mathbf{R}^2$ の要素 (a_1, a_2) との積を次のように定義する：

$$p(a_1, a_2) = (pa_1, pa_2) .$$

この積をスカラー積という．

例 平面ベクトル $(2, -3)$ と $(-6, 8)$ とのベクトル和は

$$(2, -3) + (-6, 8) = (2 + (-6), -3 + 8) = (-4, 5) .$$

平面ベクトル $(7, -5)$ とスカラー $\frac{3}{2}$ との積は

$$\frac{3}{2}(7, -5) = \left(\frac{3}{2} \cdot 7, \frac{3}{2} \cdot (-5) \right) = \left(\frac{21}{2}, -\frac{15}{2} \right) .$$

終

実数 x と y との順序対 (x, y) にベクトル和及びスカラー積の演算を考えると、実数の順序対を 2 次元実ベクトルというあるいは平面ベクトルという。実ベクトルとは成分が実数であるベクトルのことである。

実数 x と y との順序対 (x, y) にベクトル和及びスカラー積の演算を考えると、実数の順序対を 2 次元実ベクトルというあるいは平面ベクトルという。実ベクトルとは成分が実数であるベクトルのことである。平面ベクトルに対して実数のことをスカラーという。平面ベクトル (x, y) を構成する実数 x と y とをベクトル (x, y) の成分という。一つめの成分 x を第 1 成分といい、二つめの成分 y を第 2 成分という。

実数 x と y との順序対 (x, y) を座標平面の点（の座標）と考えるとき，実数の順序対の全体 $\mathbf{R}^2$ は座標平面である．実数 x と y との順序対 (x, y) を平面ベクトルと考えるとき，実数の順序対の全体 $\mathbf{R}^2$ を2次元実ベクトル空間あるいはベクトル平面という．

実数 x と y との順序対 (x, y) を座標平面の点（の座標）と考えるとき，実数の順序対の全体 $\mathbf{R}^2$ は座標平面である．実数 x と y との順序対 (x, y) を平面ベクトルと考えるとき，実数の順序対の全体 $\mathbf{R}^2$ を2次元実ベクトル空間あるいはベクトル平面という．実数 x と y との順序対 (x, y) は，座標平面の点と考えることも平面ベクトルと考えることもできる．座標平面の点と考えると和とか積とかの演算はできない．平面ベクトルと考えるとベクトル和およびスカラー積の演算ができる．

以後，平面ベクトルを太文字で表す．

平面ベクトル $(0,0)$ を零ベクトルといい, $\mathbf{0}$ と書き表す :

$$\mathbf{0} = (0,0) .$$

[定理 2.3.1] 各平面ベクトル a, b, c 及び各実数 p, q について、以下のことが成り立つ：

(加法の交換法則)

$$a + b = b + a ;$$

(加法の結合法則)

$$a + (b + c) = (a + b) + c ;$$

$$0 + a = a + 0 = a ;$$

$$a + (-a) = -a + a = 0 ;$$

$$1a = a ;$$

(スカラー積の結合法則)

$$p(qa) = (pq)a ;$$

(スカラー積の分配法則)

$$p(a + b) = pa + pb , \quad (p + q)a = pa + qa .$$

これらのうちのいくつかを証明する.

各実数 a_1, a_2, b_1, b_2 対して, 平面ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ とについて,

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \ ,$$

$$\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} = (b_1, b_2) + (a_1, a_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2) \ ,$$

よって $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}$.

各実数 a_1, a_2 について, 平面ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ に対して,
 $-\boldsymbol{a} = (-a_1, -a_2)$ なので,

$$\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = (a_1, a_2) + (-a_1, -a_2) = (a_1 + (-a_1), a_2 + (-a_2)) = (0, 0) = \mathbf{0} ,$$

$$-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = (-a_1, -a_2) + (a_1, a_2) = (-a_1 + a_1, -a_2 + a_2) = (0, 0) = \mathbf{0} .$$

よって, $\boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$, $-\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a} = \mathbf{0}$.

各実数 a_1, a_2, b_1, b_2 について, 平面ベクトル $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2)$ と各実数 p とに対して,

$$\begin{aligned} p(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) &= p\{(a_1, a_2) + (b_1, b_2)\} = p(a_1 + b_1, a_2 + b_2) = (p(a_1 + b_1), p(a_2 + b_2)) \\ &= (pa_1 + pb_1, pa_2 + pb_2) \ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p\boldsymbol{a} + p\boldsymbol{b} &= p(a_1, a_2) + p(b_1, b_2) = (pa_1, pa_2) + (pb_1, pb_2) \\ &= (pa_1 + pb_1, pa_2 + pb_2) \ , \end{aligned}$$

よって $p(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = p\boldsymbol{a} + p\boldsymbol{b}$.

[定理 2.3.2] 零ベクトル $\mathbf{0}$ 及び各平面ベクトル $\mathbf{a}$ について $0\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

[証明] 実数 a_1, a_2 に対して $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ とおくと,

$$0\mathbf{a} = 0 \cdot (a_1, a_2) = (0 \cdot a_1, 0 \cdot a_2) = (0, 0) = \mathbf{0} .$$

証明終了

[定理 2.3.3] 零ベクトル $\mathbf{0}$ および各実数 p について $p\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

[証明] $\mathbf{0} = (0, 0)$ なので,

$$p\mathbf{0} = p \cdot (0, 0) = (p \cdot 0, p \cdot 0) = (0, 0) = \mathbf{0} .$$

証明終了

平面ベクトル a に対し、実数 -1 とベクトル a とのスカラー積 $-1a$ を $-a$ と略記する： $-a = -1 \cdot a$. 平面ベクトル a に対して、ベクトル $-a$ を a の逆ベクトルという.

[定理 2.3.4] 各実数 a_1, a_2 について、平面ベクトル $a = (a_1, a_2)$ に対して $-a = (-a_1, -a_2)$.

証明

$$-a = -1 \cdot (a_1, a_2) = (-1a_1, -1a_2) = (-a_1, -a_2) .$$

証明終了

平面ベクトル a と b に対し, $a + (-b)$ を $a - b$ と書き表す:

$$a - b = a + (-b) .$$

[定理 2.3.5] 各実数 a_1, a_2, b_1, b_2 について, 平面ベクトル $a = (a_1, a_2)$ と $b = (b_1, b_2)$ に対して $a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$.

証明

$$\begin{aligned} a - b &= a + (-b) = (a_1, a_2) + (-(b_1, b_2)) \\ &= (a_1, a_2) + (-b_1, -b_2) = (a_1 + (-b_1), a_2 + (-b_2)) \\ &= (a_1 - b_1, a_2 - b_2) . \end{aligned}$$

証明終了

例 平面ベクトル $(9, 5)$ から平面ベクトル $(7, -3)$ を引く:

$$(9, 5) - (7, -3) = (9 - 7, 5 - (-3)) = (2, 8) .$$

終