

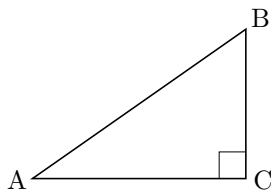
2.2

座標平面における2点間の距離

[ピタゴラスの定理 (三平方の定理)]

相異なる 3 点 A, B, C を頂点とする
三角形 ABC において角 ACB が直
角であるとき,

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 .$$



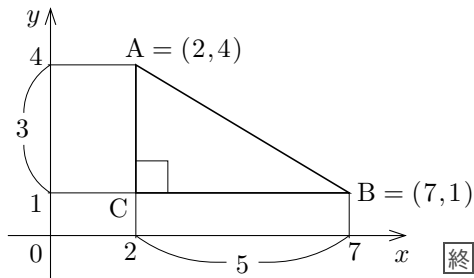
例 座標平面において点 $A = (2, 4)$ と点 $B = (7, 1)$ との間の距離 $\overline{AB}$ を求める．点 $C = (1, 5)$ を考える．角 ACB が直角なので，三角形 ABC は直角三角形である．ピタゴラスの定理より，

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 .$$

$$\overline{AC} = |1 - 4| = 3 , \quad \overline{BC} = |2 - 7| = 5 \quad \text{なので,}$$

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 3^2 + 5^2 = 34 .$$

$$\text{故に } \overline{AB}^2 = 34 \quad \text{なので} \quad \overline{AB} = \sqrt{34} .$$



終

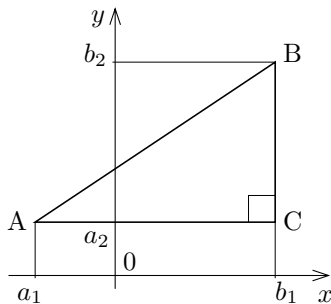
一般的に次の定理が導かれる.

[定理 2.2] 座標平面 $\mathbf{R}^2$ において, 点 $A = (a_1, a_2)$ と点 $B = (b_1, b_2)$ とを結ぶ線分 AB の長さ $\overline{AB}$ は

$$\overline{AB}^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 .$$

[証明] 点 $A = (a_1, a_2)$ 及び点 $B = (b_1, b_2)$ に対して, 座標平面 $\mathbf{R}^2$ の点 $C = (b_1, a_2)$ をとる. 線分 AC は x 軸と平行であり, 線分 BC は y 軸と平行である. x 軸と y 軸とは垂直に交わるので, 三角形 ABC は $\angle ACB$ を直角とする直角三角形である. 従って, ピタゴラスの定理により,

$$\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 .$$



$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 .$$

$A = (a_1, a_2)$, $C = (b_1, a_2)$ なので,

$\overline{AC} = |a_1 - b_1|$, よって

$$\overline{AC}^2 = |a_1 - b_1|^2 = (a_1 - b_1)^2 .$$

$B = (b_1, b_2)$, $C = (b_1, b_2)$ なので,

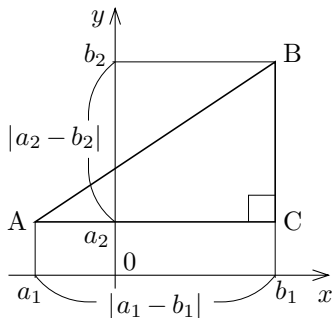
$\overline{BC} = |a_2 - b_2|$, よって

$$\overline{BC}^2 = |a_2 - b_2|^2 = (a_2 - b_2)^2 .$$

故に,

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 .$$

証明終了



[定理] 数直線上の各実数 a と b について, a と b との間の距離は $|a - b|$ である.

[定理] 各実数 a について $|a|^2 = a^2$.

例 xy 座標平面において、点 P の x 座標は 3 であり、点 $A = \left(9, \frac{5}{8}\right)$ と P との間の距離が 7 であるとする．このような点 P を求める．点 P の y 座標を y とおく． $P = (3, y)$ なので、

$$\overline{AP}^2 = (3 - 9)^2 + \left(y - \frac{5}{8}\right)^2 = \left(y - \frac{5}{8}\right)^2 + 36 .$$

$\overline{AP} = 7$ なので、 $\overline{AP}^2 = 7^2 = 49$. $\left(y - \frac{5}{8}\right)^2 + 36 = 49$, $\left(y - \frac{5}{8}\right)^2 = 13$,
 $y - \frac{5}{8} = \pm\sqrt{13}$, $y = \frac{5}{8} \pm \sqrt{13}$. 故に $P = (2, y) = \left(3, \frac{5}{8} \pm \sqrt{13}\right)$.

この例において方程式 $\left(y - \frac{5}{8}\right)^2 + 36 = 49$ を解くために左辺を展開して整理すると $y^2 - \frac{5}{4}y - \frac{807}{64} = 0$ となり計算が大変になるので、展開しない方がよい.

終

問2.2.1 xy 座標平面において、点 P の y 座標は 5 であり、点 $A = \left(\frac{6}{7}, -3\right)$ と P との間の距離が 9 であるとする．このような点 P を求めよ．

点 P の x 座標を x とおく． $P = (x, 5)$ なので、

$$\overline{AP}^2 = \left(x - \frac{6}{7}\right)^2 + \{5 - (-3)\}^2 = \left(x - \frac{6}{7}\right)^2 + 64 .$$

$\overline{AP} = 9$ なので、 $\overline{AP}^2 = 81$ ． $\left(x - \frac{6}{7}\right)^2 + 64 = 81$, $\left(x - \frac{6}{7}\right)^2 = 17$,

$x - \frac{6}{7} = \pm\sqrt{17}$, $x = \frac{6}{7} \pm \sqrt{17}$ ． 故に $P = (x, 5) = \left(\frac{6}{7} \pm \sqrt{17}, 5\right)$ ． □終

例 xy 座標平面において、点 P の x 座標は 8 であり、点 $A = (4, 5)$ と P との間の距離と点 $B = (6, 3)$ と P との間の距離とが等しいとする．このような点 P を求める．点 P の y 座標を y とおく． $P = (8, y)$ なので、

$$\overline{AP}^2 = (8 - 4)^2 + (y - 5)^2 = 16 + y^2 - 10y + 25 = y^2 - 10y + 41 ,$$

$$\overline{BP}^2 = (8 - 6)^2 + (y - 3)^2 = 4 + y^2 - 6y + 9 = y^2 - 6y + 13 .$$

$\overline{AP} = \overline{BP}$ なので $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$, よって

$$y^2 - 10y + 41 = y^2 - 6y + 13 ,$$

$-4y = -28$, $y = 7$. 故に $P = (8, y) = (8, 7)$.

終

問2.2.2 xy 座標平面において、点 P の y 座標は 9 であり、点 $A = (5, 7)$ と P との間の距離と点 $B = (6, 8)$ と P との間の距離とが等しいとする．このような点 P を求めよ．

点 P の x 座標を x とおく． $P = (x, 9)$ なので、

$$\overline{AP}^2 = (x - 5)^2 + (9 - 7)^2 = x^2 - 10x + 25 + 4 = x^2 - 10x + 29 ,$$

$$\overline{BP}^2 = (x - 6)^2 + (9 - 8)^2 = x^2 - 12x + 36 + 1 = x^2 - 12x + 37 .$$

$\overline{AP} = \overline{BP}$ なので $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$, よって

$$x^2 - 10x + 29 = x^2 - 12x + 37 ,$$

$2x = 8$, $x = 4$. 故に $P = (x, 9) = (4, 9)$.

終

例 座標平面において，点 P は，点 $A = (1, 4)$ との間の距離と点 $B = (2, 3)$ との間の距離と点 $C = (5, -4)$ との間の距離とが等しいとする．このような点 P を求める．実数 x, y について $P = (x, y)$ とする．

$$\overline{AP}^2 = (x-1)^2 + (y-4)^2 = x^2 - 2x + y^2 - 8y + 17 ,$$

$$\overline{BP}^2 = (x-2)^2 + (y-3)^2 = x^2 - 4x + y^2 - 6y + 13 ,$$

$$\overline{CP}^2 = (x-5)^2 + \{y - (-4)\}^2 = x^2 - 10x + y^2 + 8y + 41 .$$

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{ なので, } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 ,$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 8y + 17 = x^2 - 4x + y^2 - 6y + 13 ,$$

$$\text{整理すると, } 2x - 2y = -4 , \quad x - y = -2 . \quad \overline{AP} = \overline{CP} \text{ なので, } \overline{AP}^2 = \overline{CP}^2 ,$$

$$x^2 - 2x + y^2 - 8y + 17 = x^2 - 10x + y^2 + 8y + 41 ,$$

$$\text{整理すると, } 8x - 16y = 24 , \quad x - 2y = 3 .$$

連立方程式

$$x - y = -2 \quad \text{かつ} \quad x - 2y = 3$$

を解くと、 $x = -7$ かつ $y = -5$. 故に $P = (x, y) = (-7, -5)$.

終

問2.2.3 座標平面において、点 P は、点 $A = (-1, 6)$ との間の距離と点 $B = (-4, 3)$ との間の距離と点 $C = (5, 4)$ との間の距離とが等しいとする。このような点 P を求めよ。

実数 x, y について $P = (x, y)$ とする。

$$\overline{AP}^2 = \{x - (-1)\}^2 + (y - 6)^2 = x^2 + 2x + y^2 - 12y + 37 ,$$

$$\overline{BP}^2 = \{x - (-4)\}^2 + (y - 3)^2 = x^2 + 8x + y^2 - 6y + 25 ,$$

$$\overline{CP}^2 = (x - 5)^2 + (y - 4)^2 = x^2 - 10x + y^2 - 8y + 41 .$$

$$\overline{AP} = \overline{BP} \text{ なので, } \overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 ,$$

$$x^2 + 2x + y^2 - 12y + 37 = x^2 + 8x + y^2 - 6y + 25 ,$$

$$-6x - 6y = -12 , \quad x + y = 2 . \quad \overline{AP} = \overline{CP} \text{ なので, } \overline{AP}^2 = \overline{CP}^2 ,$$

$$x^2 + 2x + y^2 - 12y + 37 = x^2 - 10x + y^2 - 8y + 41 ,$$

$$12x - 4y = 4 , \quad 3x - y = 1 . \quad \text{これらの方程式より } x = \frac{3}{4} \text{ かつ } y = \frac{5}{4} . \text{ 故に}$$

$$P = (x, y) = \left(\frac{3}{4}, \frac{5}{4} \right) .$$

終

前節で述べたように、座標系の 2 本の座標軸は垂直に交わることを前提にした。このような座標系を特に直交座標系あるいはデカルト座標系という。つまり、前節で述べた座標系は直交座標系である。本節の定理 2.2 は直交座標系で成り立つ。2 本の座標軸が垂直に交わることを前提にしない座標系もある。